Riemanns Zetafunktion

Christian Berg

De to vigtigste matematikere, der har beskæftiget sig med Zetafunktionen, er Euler og Riemann. Den første fandt ud af, at funktionen hænger nøje sammen med primtallene. Den anden gik langt videre og studerede funktionen af en kompleks variabel. Riemann fremsatte den til dato ubeviste hypotese, at funktionens nulpunkter i den komplekse plan uden for den reelle akse alle ligger på en lodret linie med realdel $\frac{1}{2}$. Desuden studerede han primtalsfunktionen $\pi(x)$, der angiver antallet af primtal mindre end x. Baseret på Riemanns arbejde blev primtalssætningen bevist i 1896. Den siger, at for store værdier af x, er $\pi(x)$ omtrent lig med $x/\log(x)$.

I 1859 skrev Bernhard Riemann (1826–1866) et berømt arbejde: "*Om antallet af primtal under en given størrelse*". Mange af eftertidens store matematikere som Hadamard, von Mangoldt, de la Vallée Poussin, Hardy, Littlewood, Siegel, Harald Bohr, Selberg og Artin har i deres arbejder været inspireret af idéer fra Riemanns otte sider lange afhandling, der nærmest må kaldes et resumé af hans forskning på området. Det er ikke let at læse Riemann. Når læseren møder en påstand, så kan det være noget som let eftervises, det kan være noget, som Riemann ønsker at bevise eller mener, han har vist, og som først er blevet bevist årtier senere, og det kan være en formodning, som til dato er ubevist. Men desværre kan det også være forkert, medmindre der stilles yderligere betingelser. Riemann var langt forud for sin tid. Det tog mindst 30 år, før nogen virkelig fattede hans idéer, og da Siegel i 1932 undersøgte Riemanns efterladte papirer, fandt han nye, betydningsfulde resultater.

Man kan finde yderligere information om meget af det følgende ved at søge på internettet og læse Wikipedia-artikler.

Eulers studier

I studiet af primtallenes fordeling spiller Riemanns Zetafunktion ζ en vigtig rolle. Funktionen var allerede studeret af Leonhard Euler (1707–1783), og den er defineret ved formlen

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}. \tag{1}$$

For at forstå denne formel, hvor man lægger uendeligt mange reelle tal sammen, er man nødt til at præcisere, hvad man mener med udtrykket, som kaldes en uendelig række. Hvis man nøjes med at summere ved at tage N led med i rækken, altså ser på tallene

$$\zeta_N(x) = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^x} = \frac{1}{1^x} + \frac{1}{2^x} + \cdots + \frac{1}{N^x}, N = 1, 2, \ldots,$$

så er spørgsmålet, hvad der sker, når vi lader N blive større og større. Det viser sig, at når $x \leq 1$, så vil $\zeta_N(x)$ nærme sig uendelig, dvs. kunne blive større end et hvilket som helst stort tal, bare N vælges tilstrækkeligt stor. Hvis derimod $x > 1$, så vil $\zeta_N(x)$ nærme sig et endeligt tal, som vi kalder $\zeta(x)$, når N bliver større og større. Vi siger, at rækken (1) er konvergent, når $x > 1$, og at den er divergent, når $x \leq 1$.

Euler fandt som den første ud af, at $\zeta(2) = \pi^2/6$, hvor $\pi = 3{,}14159...$, er defineret som den halve omkreds af en cirkel med radius 1 (eller ækvivalent hermed som arealet af den tilhørende cirkelskive). Problemet at finde den eksakte værdi af $\zeta(2)$ blev i samtiden kaldt Basel-problemet, og det var åbent i knap 100 år, før Euler fandt værdien omkring 1735. Løsningen gjorde med ét slag Euler berømt. Senere fandt Euler ud af, at

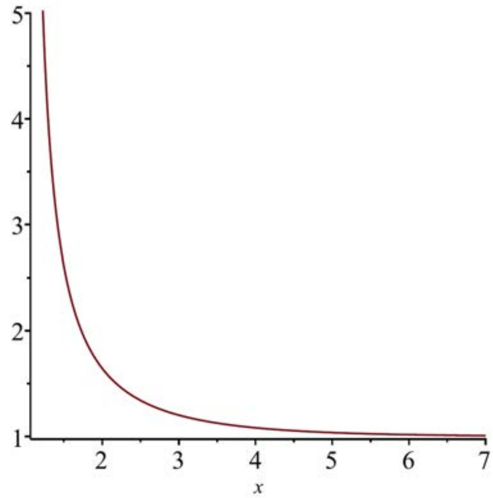
$$\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}, \quad \zeta(6) = \frac{\pi^6}{945},$$

og han fandt endda en formel for $\zeta(2k)$ udtrykt ved det $2k$'te Bernoullital (se afsnittet herom nedenfor)

$$\zeta(2k) = (-1)^{k-1} \frac{2^{2k-1} B_{2k}}{(2k)!} \pi^{2k}, \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{2}$$

Det skal understreges, at der ikke kendes nogen formel for ζ's værdier for de ulige heltal $3, 5, \ldots$.

Tegner man grafen for Zetafunktionen på det åbne interval $(1, \infty)$, ser man, at den aftager fra ∞ til 1.



Figur 1. Grafen for ζ på intervallet $(1, 7)$.

Euler opdagede også, at der er en sammenhæng mellem Zetafunktionen og primtallene $\mathbb{P} := \{2, 3, 5, 7, 11, \ldots\}$, dvs. de naturlige tal større end 1, der ikke kan deles med andre naturlige tal større end 1 end tallet selv. Primtallene er byggestenene for alle naturlige tal, idet ethvert naturligt tal større end 1 på entydig måde kan faktoriseres med udnyttelse af primtallene, fx

$$20328 = 2^3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11^2.$$

Hvis vi stiller primtallene op i en følge $p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, p_4 = 7, p_5 = 11, \ldots$ (allerede hos Euklid er der bevis for, at der er uendeligt mange primtal), så fandt Euler ud af, at

$$\zeta(x) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_n^x}}, \quad x > 1, \tag{3}$$

altså at tallene

$$\prod_{n=1}^{N} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_n^x}}$$

nærmer sig $\zeta(x)$, når N bliver større og større. (Symbolet $\prod_{n=1}^{N} a_n$ betyder, at man skal danne produktet af tallene $a_1, a_2, \ldots, a_N$.)

For at forstå, at formlen blot er et udtryk for, at ethvert tal kan faktoriseres i primtal, skal vi udnytte den simple uendelige kvotientrække

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}, \quad 0 < q < 1. \tag{4}$$

Formlen betyder nemlig ved successivt at vælge $q = 1/2^x, q = 1/3^x, \ldots, q = 1/p_n^x$ at (3) kan skrives

$$\zeta(x) = \left(1 + \tfrac{1}{2^x} + \tfrac{1}{(2^2)^x} + \cdots\right) \cdot \left(1 + \tfrac{1}{3^x} + \tfrac{1}{(3^2)^x} + \cdots\right) \cdots \left(1 + \tfrac{1}{p_n^x} + \tfrac{1}{(p_n^2)^x} + \cdots\right) \cdots .$$

For at få bidraget $1/20328^x$ fra $\zeta(x)$ skal vi tage fjerde led $(= 1/(2^3)^x)$ fra første parentes, andet led $(= 1/3^x)$ fra anden parentes, første led (=1) fra tredie parentes, andet led $(= 1/7^x)$ fra fjerde parentes, tredie led $(= 1/(11^2)^x)$ fra femte parentes og derefter første led (=1) fra alle efterfølgende parenteser.

Euler bemærkede, at (3) for $x \to 1^+$ har den konsekvens at

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n} = \infty,$$

som på en stærk måde illustrerer, at der er uendeligt mange primtal, men de vokser langsommere end kvadrattallene n^2 da $\zeta(2) < \infty$.

Riemanns studier

Når funktionen ζ kaldes Riemanns Zetafunktion, er det fordi, Riemann gik langt videre end Euler og studerede funktionen som en funktion af en kompleks variabel. For at forstå dette kræves kendskab til mængden af de komplekse tal $\mathbb{C}$. Det drejer sig om tal af formen $z = x + iy$, hvor x og y er reelle tal, og i er et symbol, der opfylder $i^2 = -1$, så i og $-i$ er de to løsninger til andengradsligningen $x^2 + 1 = 0$. Denne ligning har som bekendt ingen reelle løsninger, og derfor kaldes i den imaginære enhed. Man kan sige, at $i = \sqrt{-1}$ rent symbolsk, men der er jo ingen reelle tal, hvis kvadrat er -1. Matematikerne begyndte at regne med komplekse tal i 1500-tallet, men først omkring år 1800 nåede man til fuld forståelse af de komplekse tal, bl.a. via den dansk-norske landmåler Caspar Wessel (1745–1818).

Man regner med komplekse tal, som om det var sædvanlige tal, men skal benytte reglen $i^2 = -1$, og $x + iy$ skal fortolkes som $x + i \cdot y = x + y \cdot i$.

Således er

$$(2 + i5) + (3 + i2) = (2 + 3) + i(5 + 2) = 5 + i7,$$

$$\begin{aligned}(2 + i5) \cdot (3 + i2) &= 6 + i4 + i15 + 10i^2 \\ &= 6 - 10 + i(4 + 15) = -4 + i19.\end{aligned}$$

Det komplekse tal $x + iy$ kan repræsenteres ved punktet (x, y) i en plan med et retvinklet koordinatsystem. Det betyder, at 1 er enheden på abscisseaksen (= den reelle akse), og i er enheden på ordinataksen (= den imaginære akse), og planen kaldes den komplekse plan. For et komplekst tal $z = x+iy$ kaldes x for realdelen af z (skrevet $x = \Re(z)$), medens y kaldes imaginærdelen af z (skrevet $y = \Im(z)$). Det komplekse tal $z = x + iy$ har den numeriske værdi $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, som er afstanden fra $(0, 0)$ til (x, y) i planen. Medens de reelle tal kan identificeres med punkterne på en tallinie, kan de komplekse tal altså identificeres med punkterne i en plan.

Vi kan også betragte uendelige rækker $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ med komplekse led $z_n = x_n + iy_n$. En sådan række kaldes **konvergent**, hvis de endelige summer

$$\sum_{n=1}^{N} z_n, \quad N = 1, 2, \ldots,$$

nærmer sig et fast komplekst tal $S = U + iV$, når N bliver større og større. Det kommer ud på, at de to rækker med reelle led $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ og $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ begge er konvergente med summer henholdsvis U og V. Hvis en række ikke er konvergent, så kaldes den divergent. Euler betragtede de elementære funktioner $\sin$, $\cos$, $\exp$ af en kompleks variabel ved at bruge uendelige rækker. For $z \in \mathbb{C}$ defineres

$$\begin{aligned}\sin(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \\ \cos(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \\ \exp(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!},\end{aligned}$$

og alle tre rækker er konvergente for alle komplekse tal z. Indføres tallet e ved den uendelige række

$$e = \exp(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 2{,}71828\ldots,$$

er der gode grunde til at benytte skrivemåden

$$\exp(z) = e^z, \quad z \in \mathbb{C},$$

men det vil vi ikke komme nærmere ind på. Euler fandt sammenhængen

$$\exp(x+iy) = \exp(x)\left(\cos(y) + i\sin(y)\right), \quad x, y \in \mathbb{R},$$

altså
$$\Re(\exp(x+iy)) = \exp(x)\cos(y),$$
$$\Im(\exp(x+iy)) = \exp(x)\sin(y).$$
Det leder til den forunderlige formel $\exp(i\pi) = e^{i\pi} = -1$.

Det er uproblematisk at definere $\zeta(z)$ for $\Re(z) > 1$ ved formlen
$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}, \tag{5}$$
idet man definerer $n^z = \exp(z\log(n))$. Denne række er nemlig konvergent, når $\Re(z) > 1$, men divergent, når $\Re(z) \leq 1$. Fra et geometrisk synspunkt er ζ altså defineret i halvplanen $\{z \in \mathbb{C} \mid \Re z > 1\}$, der ligger til højre for den lodrette linie $\{z \in \mathbb{C} \mid \Re(z) = 1\}$. Zetas værdier er visse komplekse tal. Det er imidlertid svært at forstå præcist, hvordan funktionsværdierne opfører sig, og det har givet anledning til hundredevis af studier. Det skal nævnes, at formlen (3) også har mening og er rigtig, når x erstattes af et komplekst tal z med $\Re(z) > 1$. Der gælder altså, at tallene
$$\zeta(z)\prod_{n=1}^{N}\left(1 - \frac{1}{p_n^z}\right),$$
nærmer sig 1, når $N \to \infty$. Det har den konsekvens, at $\zeta(z) \neq 0$ når $\Re(z) > 1$.

En af de største opdagelser i 1800-tallet var klassen af holomorfe funktioner, som er en speciel klasse af funktioner af en kompleks variabel med komplekse værdier. De tre hovedaktører i teoriudviklingen var Cauchy, Riemann og Weierstrass. At en funktion $f : G \to \mathbb{C}$ er holomorf i området $G \subseteq \mathbb{C}$ kan kortest bekrives ved kravet om, at differenskvotienterne
$$\frac{f(z+c) - f(z)}{c}$$
skal have en grænseværdi for alle $z \in G$, når den komplekse tilvækst c nærmer sig 0. Hvis dette er tilfældet, kalder man grænseværdien $f'(z)$, altså i symboler
$$\lim_{c\to 0} \frac{f(z+c) - f(z)}{c} = f'(z),$$
og $f'(z)$ kaldes den komplekse differentialkvotient af $f(z)$. Teorien er altså helt analog med differentialregning for funktioner af en reel variabel, men det viser sig at være en meget eksklusiv egenskab at være holomorf. Grunden ligger kort fortalt i, at ved differentiabilitet af en reel funktion, er tilvæksten c reel, dvs. $z + c$ nærmer sig tallet z fra højre eller venstre, men når det drejer sig om komplekse tilvækster c, så vil $z + c$ kunne nærme sig z fra alle retninger i den komplekse plan.

Polynomier og de ovenfor definerede funktioner $\sin, \cos, \exp$ er holomorfe i hele $\mathbb{C}$, og Zetafunktionen er holomorf i den højre halvplan defineret overfor.

Sætning 1. Entydighedssætningen for holomorfe funktioner *Lad f, g være to holomorfe funktioner i et område $G \subseteq \mathbb{C}$ og lad $I \subset G$ være et kurvestykke. Hvis $f(z) = g(z)$ for alle $z \in I$, så gælder automatisk at $f(z) = g(z)$ for alle $z \in G$.*

For at sikre sig at to holomorfe funktionerf, g defineret i hele $\mathbb{C}$ er ens, er det altså nok at vide, at de er ens for alle reelle værdier ($I = \mathbb{R}$) eller blot, at de er ens på et lille interval f.eks. $[3, \pi]$ eller på en nok så lille cirkelbue i planen.

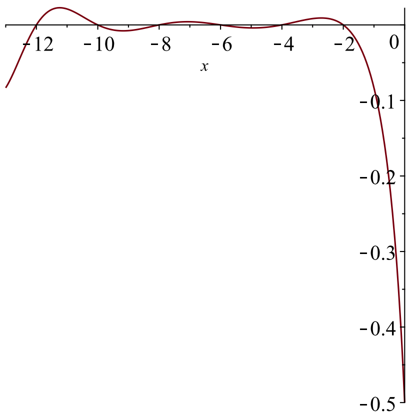
Det er en utroligt dyb og vigtig sætning. Riemann opdagede, at Zetafunktionen kan defineres som en holomorf funktion i $\mathbb{C} \setminus \{1\}$, så den passer med udtrykket (1), når $z = x > 1$. Af entydighedssætningen følger, at der kun er én måde at gøre dette på. Det følger også, at hvis man finder to forskellige måder at definere ζ på som holomorf funktion, der stemmer overens med (1), så må de to formler være lig hinanden. Det er for indviklet her at forklare, hvordan Riemann definerede Zetafunktionen i den venstre halvplan $\{z \in \mathbb{C} \mid \Re(z) \leq 1\}$, men det skal nævnes, at han fandt den berømte **funktionalligning** for ζ

$$\zeta(z)\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)\pi^{-\frac{z}{2}} = \zeta(1-z)\Gamma\left(\frac{1-z}{2}\right)\pi^{-\frac{1-z}{2}}, z \in \mathbb{C}, \tag{6}$$
der sammenknytter værdierne i z og $1 - z$.

Her optræder Eulers Gammafunktion Γ
$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}dt \quad , \Re(z) > 0 ,$$
der har den simple funktionalligning
$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z).$$
Den skal i øvrigt bruges til at udvide Γ til en holomorf funktion i $\mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \ldots\}$ med såkaldte poler for $z = 0, -1, -2, \ldots$ hvor $|\Gamma(z)| \to \infty$, når z nærmer sig en af polerne. (F. eks. er $\Gamma(-1/2) = -2\Gamma(1/2)$.)

Af (6) kan man slutte, at ζ i halvplanen $\Re(z) < 0$ har nulpunkter, hvor $\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)$ har poler, altså netop i de negative lige tal $z = -2, -4, \ldots$. Resten af ζ's nulpunkter må ligge i strimlen $0 \leq \Re z \leq 1$. At der ikke er nogen nulpunkter på linierne $\Re z = 0$ og $\Re z = 1$ viste sig at være en væsentlig ingrediens i beviset for den berømte primtalssætning, som vi vender tilbage til nedenfor.

Zetafunktionen oscillerer vildere og vildere mellem de lige nulpunkter $-2k$, $k = 1, 2, \ldots$, når k vokser. Fx er (med 5 rigtige decimaler)
$$\zeta(-13) = -0{,}08333, \zeta(-15) = 0{,}44325,$$
$$\zeta(-17) = -3{,}05395, \zeta(-19) = 26{,}45621.$$
Man kan vise, at $\zeta(0) = -1/2$ og på intervallet $(-2, 1)$ aftager ζ fra 0 til $-\infty$. Der er faktisk en formel for Zetafunktionens værdier i de negative heltal udtrykt ved Bernoullitallene B_n, nemlig
$$\zeta(-n) = (-1)^n\frac{B_{n+1}}{n+1}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots . \tag{7}$$
De to formler (7) og (2) kan i øvrigt udledes af hinanden ved brug af funktionalligningen (6). Zetafunktionen er inkluderet i softwareprogrammet Maple, som er brugt til at tegne figur 2.



Figur 2. Grafen for ζ på intervallet $(-13, 0)$.

Primtalssætningen

Lad $\pi(x)$ betegne antallet af primtal $\leq x$, altså f.eks.

$$\pi(2) = 1,\ \pi(3) = \pi(\pi) = \pi(4) = 2,\ \pi(10) = 4,$$

$$\pi(100) = 25.$$

Primtalssætningen siger, at antallet $\pi(x)$ er tilnærmelsesvist det samme som $x/\log(x)$, når x er stor, i symboler

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x} \quad \text{for} \quad x \to \infty, \tag{8}$$

og helt præcist betyder det, at udtrykket til venstre for $\sim$ divideret med udtrykket til højre for $\sim$ har grænseværdien 1, når x går mod uendelig, altså

$$\lim_{x\to\infty} \pi(x)\frac{\log(x)}{x} = 1.$$

At der ikke er nogen nulpunkter på linierne $\Re(z) = 0$ og $\Re(z) = 1$, og at (8) dermed gælder, blev vist af Hadamard og de la Vallée Poussin uafhængigt af hinanden i 1896. Langt senere er der givet et såkaldt elementært bevis for (8) af nordmanden Atle Selberg (1949). Det “elementære"betyder, at der ikke anvendes kompleks funktionsteori og Fourier-transformation, men ellers er beviset ikke elementært.

Riemann hævdede også, at antallet $N(T)$ af nulpunkter for ζ i rektanglet $0 \leq \Re z \leq 1$, $0 \leq \Im z \leq T$ opfylder

$$N(T) \sim \frac{T}{2\pi}\log\frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi}\ , \quad T \to \infty\ , \tag{9}$$

Det lykkedes først von Mangoldt i 1903 at vise (9). Derudover formodede Riemann, at *alle nulpunkter for* ζ *i strimlen* $0 \leq \Re z \leq 1$ *faktisk ligger på symmetrilinien* $\Re z = \frac{1}{2}$. Dette er den berømte og til dato stadig ubeviste **Riemann-hypotese**.

Ifølge Clay Mathematics Institute er Riemanns hypotese et af de syv Millennium Prize Problems, hvis løsning hver udløser en belønning på en million US-dollars.

Hardy beviste i 1914, at ζ har uendeligt mange nulpunkter på linien $\Re(z) = \frac{1}{2}$. Bohr og Landau viste (også i 1914), at $N(T) \sim N_\varepsilon(T)$ for ethvert $\varepsilon > 0$ når $T \to \infty$, hvor $N_\varepsilon(T)$ er antallet af nulpunkter for ζ i rektanglet $\frac{1}{2} - \varepsilon \leq \Re(z) \leq \frac{1}{2} + \varepsilon$, $0 \leq \Im(z) \leq T$, altså løst sagt, at nulpunkterne ligger tæt ved linien $\Re(z) = \frac{1}{2}$. Bemærk, at funktionalligningen (6) viser, at hvis $\zeta = \frac{1}{2} + it$ er nulpunkt for ζ, så er også $z = \frac{1}{2} - it$ nulpunkt.

Den første substantielle numeriske information om ζ's nulpunkter i den kritiske strimmel skyldes den danske matematiker og aktuar J. P. Gram. I 1903 beregnede han alle ζ's nulpunkter i rektanglet $0 \leq \Re(z) \leq 1$, $0 \leq \Im(z) \leq 50$ og fandt, at der var ti af dem og de lå alle på linien $\Re(z) = \frac{1}{2}$. Det første var $\alpha_1 = \frac{1}{2} + i\,14{,}134725$, det sidste $\alpha_{10} = \frac{1}{2} + i\,49{,}773832$, idet imaginærdelene blev angivet med seks decimaler. I 1925 kunne Hutchinson bekræfte, at alle ζ's nulpunkter med imaginærdel mellem 0 og 300 ligger på den kritiske linie, og der er 139 nulpunkter. Med brug af dagens hurtige computere ved man naturligvis, at alle nulpunkterne med imaginærdel mellem $-T$ og T ligger på den kritiske linie. Her er T et meget stort tal, som år for år bliver større og større. Det betyder ikke, at Riemanns hypotese er rigtig, men kun at den bliver mere og mere sandsynlig.

I primtalsstudier møder man integrallogaritmen

$$\mathrm{Li}(x) = \int_2^x \frac{dt}{\log t}\ , \quad x > 2,$$

Det er nemt at se ved partiel integration, at

$$\mathrm{Li}(x) \sim \frac{x}{\log x}\ ,$$

så primtalssætningen kan også formuleres som

$$\pi(x) \sim \mathrm{Li}(x)\ .$$

Allerede Gauss observerede ved beregning som 15-årig i 1792, at $\mathrm{Li}(x)$ så ud til at være en god approksimation til $\pi(x)$, og i mange år tydede numeriske beregninger på, at $\mathrm{Li}(x) > \pi(x)$. Det var derfor en overraskelse, at Littlewood i 1914 kunne vise teoretisk, at der eksisterede store x så $\mathrm{Li}(x) - \pi(x) < 0$ og endda, at udtrykket $\mathrm{Li}(x) - \pi(x)$ skiftede fortegn uendeligt mange gange, når x gennemløb tallene fra 2 til uendelig. Der er dog ingen, der har været i stand til at angive et konkret tal x hvor $\mathrm{Li}(x) < \pi(x)$, men hollænderen te Riele viste i 1986, at der i intervallet $(6{,}62 \cdot 10^{370}, 6{,}69 \cdot 10^{370})$ findes mere end 10^{180} på hinanden følgende heltal x, så $\mathrm{Li}(x) - \pi(x) < 0$.

Det er dernæst af interesse at undersøge, hvor hurtigt

$$Q(x) := |\frac{\pi(x)}{\mathrm{Li}(x)} - 1| \tag{10}$$

går mod 0 for $x \to \infty$.

De la Vallée Poussin viste i 1899, at

$$Q(x) < e^{-\sqrt{c\log x}}\ ,\ x \geq x_0$$

for passende c og x_0. Riemanns hypotese er ækvivalent med, at udtrykket i (10) går mod 0 tilstrækkeligt hurtigt. Helt præcist har man:

Sætning 2. *Riemanns hypotese er ækvivalent med, at der for ethvert $\varepsilon > 0$ gælder*

$$\lim_{x\to\infty} Q(x)x^{\frac{1}{2}-\varepsilon} = 0,$$

altså at $Q(x)$ går hurtigere mod 0 for $x \to \infty$ end $x^{-\frac{1}{2}+\varepsilon}$, uanset hvor lille ε er.

Bernoullital

Bernoullitallene $B_n, n = 0, 1, \dots$ er en kompliceret følge af rationale tal, der kan defineres som $B_0 = 1,\ B_1 = -1/2,\ B_2 = 1/6,\ B_3 = 0, B_4 = -1/30 \dots$. Når B_k er udregnet for k op til $n-1$, så udregnes B_n ved formlen

$$B_n = \frac{-1}{n+1}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n+1}{k}B_k, \quad n = 1, 2, \dots.$$

Man kan vise, at der gælder formlen

$$f(z) := \frac{z}{\exp(z)-1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{n!}z^n, \quad z \in \mathbb{C},\ |z| < 2\pi,$$

som også kan udtrykkes, at $B_n = f^{(n)}(0)$. Man kan vise, at $B_{2k+1} = 0,\ k = 1, 2, \dots$. Bernoullitallene har overraskende talteoretiske egenskaber, og de dukker uventet op i en række matematiske emner.

De følgende to lærebøger indeholder megen præcis information om ovenstående emner, men bøgerne kræver stor matematisk viden af læseren.

Litteratur

[1] H. M. Edwards (1974) *Riemann's Zeta Function*, Academic Press, New York og London.

[2] P. Ribenboim (1996) *The New Book of Prime Number Records*, Springer-Verlag New York, Inc.

Christian Berg har undervist og forsket på Institut for Matematiske Fag ved Københavns Universitet i mange år og er nu professor emeritus. Hans hovedinteresse er matematisk analyse og herunder harmonisk analyse og momentproblemer.

"Astronomy For All"-prisen

Lykke Pedersen, cand.scient og formand for Dansk Selskab for Rumfartsforskning har modtaget "Astronomy For All"-prisen, der tildeles af IAU (International Astronomical Union). IAU kunne i 2019 fejre 100-års jubilæum og lancerede i den anledning en række projekter, herunder et globalt "Moon Landing 50"-projekt, der fejrede 50-året for den første bemandede landing på Månen. I tilknytning til dette projekt blev der uddelt en række priser, bl.a. "Astronomy For All"-prisen. Omkring 1000 projekter fra 128 lande med omkring en million deltagere verden over var med i fejringen. I Danmark blev denne begivenhed markeret med projektet Space Days 2019 med bl.a. en flot udstilling i Rundetaarn, "Rundt om Månen", der blev set af over 25.000 besøgende fra flere end 45 lande. Lykke fik idéen til udstillingen tilbage i 2017 og var en af de centrale kræfter bag realiseringen af projektet.