Temperaturbølger – breddeopgave 65 med didaktisk kommentar

Af Jens Højgaard Jensen, IMFUFA, NSM, RUC.

Mit formål med artikelserien om breddeopgaver er – udover at gøre opmærksom på RUCs fysikuddannelse – dobbelt: Dels udvælger jeg opgaverne, så de kan have interesse som fysikproblemer i egen ret. Dels udvælger jeg dem med henblik på at kunne knytte didaktiske overvejelser til dem af interesse for fysikundervisere. I første omgang i forhold til universitetsundervisning. Men i anden omgang kunne der måske også trækkes paralleller til andre undervisningsniveauer.

Her bringes løsning og kommentar til opgaven fra forrige nummer samt en ny opgave. Opgaven i sidste nummer af KVANT var denne breddeopgave (nr. 65 i rækken her i KVANT):

Breddeopgave 65. Temperaturbølger

Temperaturændringerne på Jordens overflade i løbet af døgnet, i løbet af året og fra istid til istid afspejler sig hver for sig i dæmpede temperaturbølger ned gennem undergrunden. Hvordan afhænger bølgelængden af svingningstiden og undergrundens egenskaber? Begrund svaret.

Løsning

Der er to af undergrundens egenskaber, der er bestemmende for temperaturbølgerne. Den ene er undergrundens varmeledningsevne, κ. Den anden er varmefylden per volumen af undergrunden, c_v. Hvis vi skulle opstille differentialligningen, hvis løsning kunne give os udseendet af temperaturbølgerne, ville vi nemlig til en start se på et jordlag af infinitesimal tykkelse og kræve, at forskellen mellem varmeledningen ind i og ud af laget er lig med energiophobningen per tid i laget, hvor varmeledningen er proportional med κ og energiophobningen per tid er proportional med c_v.

Men lad os til en start her nøjes med at lave dimensionsanalyse. Vi kalder grunddimensionerne masse, længde, tid og temperatur for henholdsvis M, L, T og Θ. Da κ er proportionalitetskonstanten imellem varmestrømtæthed (med dimensionen M L^2 T^{-2} T^{-1} L^{-2} = M T^{-3}) og temperaturgradient (med dimensionen Θ L^{-1}), har κ den afledte dimension M T^{-3} L Θ^{-1}. Da c_v er proportionalitetskonstanten imellem energiophobning per volumen (med dimensionen M L^2 T^{-2} L^{-3}) og temperaturforøgelse (med dimensionen Θ), har c_v den afledte dimension M L^{-1} T^{-2} Θ^{-1}. Vi kalder temperaturbølgernes bølgelængde λ (med dimensionen L) og svingningstiden for temperaturændringerne ved Jordens overflade for τ (med dimensionen T). De mulige udtryk for bølgelængden som funktion af varmeledningsevnen, varmefylden per volumen og svingningstiden, $\lambda(\kappa, c_v, \tau)$, skal da søges blandt

$$\lambda(\kappa, c_v, \tau) = A\kappa^{\alpha} c_v^{\beta} \tau^{\gamma}, \tag{1}$$

hvor A er et rent (dimensionsløst) tal, og α, β og γ skal vælges, så begge sider af ligningen får samme dimension. Vi må derfor kræve, at

$$\mathrm{M}^0\mathrm{L}^1\mathrm{T}^0 = (\mathrm{M}\mathrm{T}^{-3}\mathrm{L}\Theta^{-1})^{\alpha} \cdot (\mathrm{M}\mathrm{L}^{-1}\mathrm{T}^{-2}\Theta^{-1})^{\beta} \cdot \mathrm{T}^{\gamma}. \tag{2}$$

Det betyder, at α, β og γ skal opfylde ligningssystemet

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha + \beta \quad (\mathrm{M}) \\ 1 &= \alpha - \beta \quad (\mathrm{L}) \\ 0 &= -3\alpha - 2\beta + \gamma \quad (\mathrm{T}) \\ 0 &= -\alpha - \beta \quad (\Theta), \end{aligned} \tag{3}$$

da grunddimensionerne ikke kan afledes fra hinanden, og eksponenten af hver grunddimension derfor må være den samme på hver side af ligning (2). Ligningssystemet har én og kun én løsning, nemlig $\alpha = \frac{1}{2}, \beta = -\frac{1}{2}$ og $\gamma = \frac{1}{2}$.

Som svar på opgaven har vi derfor ved hjælp af dimensionsanalyse entydigt fundet

$$\lambda(\kappa, c_v, \tau) = A\sqrt{\kappa\tau/c_v}. \tag{4}$$

Principielt behøvede vi ikke forudsætte, at præfaktoren A er et rent dimensionsløst tal. Kravet om ens dimension på begge sider af ligning (1) kunne også tænkes opfyldt af ligning (4), hvis A var en dimensionsløs funktion af dimensionsløse produkter af potenser af κ, c_v og τ. Imidlertid eksisterer der ikke sådanne produkter. Det ses af ligningssystemet (3) med den anden ligning erstattet med $0 = \alpha - \beta$, svarende til, at vi erstatter $\mathrm{M}^0\mathrm{L}^1\mathrm{T}^0$, på venstre side af ligning (2), med $\mathrm{M}^0\mathrm{L}^0\mathrm{T}^0$. Ligningssystemet har da alene løsningen $\alpha = 0, \beta = 0$ og $\gamma = 0$. Derfor er A nødvendigvis et rent dimensionsløst tal.

Kommentar

Resultatet (4) kan også findes ved at indsætte den dæmpede temperaturbølge

$$\Delta T(x,t) = \Delta T_0 \exp\left(-\frac{x}{x_0}\right) \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda} - \frac{2\pi t}{\tau}\right) \tag{5}$$

i varmediffusionsligningen

$$\kappa \frac{\partial^2 \Delta T(x,t)}{\partial x^2} = c_v \frac{\partial \Delta T(x,t)}{\partial t}. \tag{6}$$

(5) er løsning til (6), hvis og kun hvis der for dæmpningslængden x_0 og bølgelængden λ gælder $x_0 = \lambda/2\pi$ og $2\kappa\tau/c_v = \lambda x_0$. For λ finder vi derfor

$$\lambda = \sqrt{4\pi\kappa\tau/c_v}. \tag{7}$$

I forhold til dimensionsanalysen og resultatet i ligning (4) har vi fået præciseret talkonstanten til $\sqrt{4\pi}$. For x_0 finder vi

$$x_0 = \sqrt{\kappa\tau/\pi c_v}. \tag{8}$$

Bortset fra talfaktoren $\sqrt{1/\pi}$ var det også, hvad vi fandt ved dimensionsanalysen. Den viste, at der bortset fra talfaktorer, kun kan dannes én karakteristisk længde ved kombination af varmeledningsevne, varmefylde per volumen og svingningstid. Dimensionsanalysen viste derfor umiddelbart, at dæmpningslængden og bølgelængden for den dæmpede temperaturbølge kun kunne adskille sig fra hinanden med en talfaktor, som fundet i ligning (7) og (8).

Erfaringsmæssigt er der frostfrit ca. en meter nede i jorden. For $\tau = 1$ år har x_0 således størrelsesordenen 1 m. Formel (4) og (8) viser da umiddelbart, at de daglige temperatursvingninger med en svingningstid, der er ca. 400 gange så lille som de årlige, trænger ca. $\sqrt{400} = 20$ gange så lidt ned som de årlige, dvs. ca. 5 cm. Omvendt er nedtrængningsdybden for temperatursvingningerne med $\tau \approx 10000$ år fra istid til istid $\sqrt{10000} = 100$ gange så stor som den årlige, dvs ca. 100 m. Jeg har for mange år siden været vejleder for en projektgruppe på RUC, der ret overbevisende målte temperaturprofilen i et borehul, og således kortlagde et minde om sidste istid.

Breddeopgave 66. Lineal på pegefingre

Inden næste nummer af KVANT udkommer, kan læserne eventuelt overveje løsningen til denne opgave fra breddekurset på RUC (fra eksamen august 2012, nummer 66 i rækken her i KVANT):

En stok, lineal eller lignende ligger på en persons to udstrakte pegefingre. Når pegefingrene bevæges imod hinanden glider stokken/linealen først kun på den ene pegefinger, så kun på den anden, så igen kun på den første, så igen kun på den anden osv. Forklar hvordan og hvorfor.

Løsning og kommentar bringes i næste nummer.

PFEIFFER VACUUM
125 YEARS
NOTHING IS BETTER
Tlf. 4352 3800 Fax 4352 3850
Erik.Fjeldgaard@pfeiffer-vacuum.dk
www.pfeiffer-vacuum.com