Bølgemodstand
- breddeopgave 93 med didaktisk kommentar

Af Jens Højgaard Jensen, IMFUFA, INM, RUC.

Mit formål med artikelserien om breddeopgaver er – udover at gøre opmærksom på RUCs fysikuddannelse – dobbelt: Dels udvælger jeg opgaverne, så de kan have interesse som fysikproblemer i egen ret. Dels udvælger jeg dem med henblik på at kunne knytte didaktiske overvejelser til dem af interesse for fysikundervisere. I første omgang i forhold til universitetsundervisning. Men i anden omgang kunne der måske også trækkes paralleller til andre undervisningsniveauer.

Her bringes løsning og kommentar til opgaven fra forrige nummer samt en ny opgaver. Opgaven i sidste nummer af Kvant var denne breddeopgave (nr. 93 i rækken her i Kvant):

Breddeopgave 93. Bølgemodstand

Et overfladeskib, der sejler med jævn hastighed på dybt vand, danner bølger. Den del af modstanden imod skibets bevægelse, der skyldes bølgedannelsen, kaldes bølgemodstanden. For at finde bølgemodstanden ved modelforsøg i en prøvetank skal det såkaldte Froude tal være det samme ved modelforsøget som ved den modellerede sejlads. Hvad er formlen for Froude tallet? Begrund svaret.

Løsning

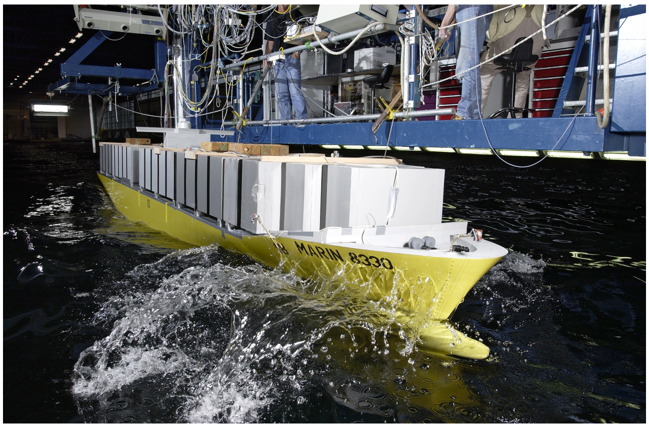
Bølgemønstret omkring skibet afhænger af dets hastighed v. Og det afhænger af formen og størrelsen af delen af skibet under vandlinjen, som kan beskrives ved en karakteristisk længde l, sammen med en række vinkler og størrelsesforhold, altså sammen med en række dimensionsløse størrelser.

Da bølgerne er tyngdebølger, altså vandbevægelser i tyngdefeltet, afhænger bølgemønstret også af tyngdefeltstyrken g. På en anden planet vil bølgemønstret være et andet, alt andet lige, hvis et sådant findes. Det er umiddelbart mindre tænkeligt, at bølgemønstret afhænger af vandets massefylde ρ, da størrelsen af masser normalt ikke har betydning for deres bevægelser i tyngdefelter. Den går ud i beregningen af bevægelser. Men størrelsen af masser har naturligvis betydning for både deres kinetiske og potentielle energi i tyngdefelterne. Da bølgemodstandskraften gange skibets hastighed er lig med det arbejde per tid, som skibets motorer skal levere for at modvirke bølgemodstanden, der igen er lig med den producerede bølgeenergi per tid, må vi derfor, ud over v, l og g, også inddrage ρ som bestemmende inputstørrelse i en bølgemodstandsformel. Derimod har størrelsen af viskositeten af væsken, der sejles i, først og fremmest betydning for, hvor hurtigt kølvandet dør ud, og ikke for dets dannelse. Alt i alt må vi gå ud fra, at bølgemodstanden K, afhænger af form, v, l, g og ρ.

Vi søger derfor en formel for bølgemodstanden med udseendet:

$$K = k \cdot v^\alpha \cdot l^\beta \cdot g^\gamma \cdot \rho^\delta, \qquad (1)$$

hvor eksponenterne skal vælges således, at dimensionen på begge sider af lighedstegnet er den samme, og hvor k i almindelighed er et dimensionsløst tal eller en dimensionsløs funktion af dimensionsløse størrelser eller dimensionsløse kombinationer af de indgående inputstørrelser.



Figur 1. Model af containerskibet Emma Mærsk under test i en prøvetank.

K er en kraft med dimensionen M L T^{-2}. Derfor skal produktet i ligning (1) også have denne dimension udtrykt ved basisdimensionerne: masse M, længde L og tid T. Da basisdimensionerne ikke kan afledes fra hinanden, skal ligning (1) dimensionsmæssigt stemme overens for hver basisdimension for sig:

$$\begin{aligned} \mathrm{M}: \quad 1 &= \delta & (2)\\ \mathrm{L}: \quad 1 &= \alpha + \beta + \gamma - 3\delta & (3)\\ \mathrm{T}: -2 &= -\alpha - 2\gamma. & (4) \end{aligned}$$

Ligning (4) er opfyldt for $\gamma = 1 - \alpha/2$. Indsat i ligning (3) sammen med $\delta = 1$ er denne opfyldt for $= 3 - \alpha/2$. Alle formler af formen:

$$K = k \cdot v^\alpha \cdot l^{3-\alpha/2} \cdot g^{1-\alpha/2} \cdot \rho = k \left(\frac{v}{\sqrt{lg}})\right)^\alpha \rho l^3 g \qquad (5)$$

lever derfor op til kravet om samme dimension på begge sider af lighedstegnet i ligning (1). Det gælder for alle værdier af α (3 ligninger med 4 ubekendte). Og også for alle linearkombinationer af led med forskellige værdier af α, da $v/\sqrt{lg}$ er dimensionsløs. Sammenfattende er bølgemodstanden derfor givet ved:

$$K = f_1(\text{form}, F_r) \cdot \rho l^3 g, \qquad (6)$$

hvor f_1 er en ukendt funktion af formen af skibsdelen under vandlinjen og af den dimensionsløse størrelse $F_r = v/\sqrt{lg}$, det såkaldte Froude tal.

Hvis man ved et modelforsøg med en prøvetank, på Jorden og med vand i, benytter samme form under vandlinjen og samme værdi af F_r som ved den sejlads, der ønskes modelleret, og dermed samme værdi af funktionen f_1 som ved sejladsen, viser ligning (6), at bølgemodstanden ved den fremtidige sejlads, K_s, er givet ved:

$$K_s = K_m \cdot (l_s/l_m)^3, \qquad (7)$$

hvor K_m er bølgemodstanden målt ved modelforsøget og l_s og l_m den valgte karakteristiske længde for henholdsvis skib og skibsmodel. Svaret på opgaven er således, at $F_r = v/\sqrt{lg}$ ved modelforsøget skal have samme størrelse i prøvetanken som ved den modellerede sejlads. Hvis skibsmodellens lineære udstrækning er 100 gange mindre end skibets, gælder resultatet i formel (7) altså for det tilfælde, hvor skibets fart er 10 gange større end skibsmodellens fart.

Kommentarer

1. Ligningerne (2), (3) og (4) kan også bruges til at udtrykke α og β som funktioner af γ i stedet for γ og β som funktioner af α, som gjort ovenfor. Så fører dimensionsanalysen til formlen:

$$K = f_2(\text{form}, lg/v^2) \cdot \rho l^2 v^2 \qquad (8)$$

i stedet for udtrykket for K i ligning (6). Forskellen mellem udtrykkene er imidlertid kun tilsyneladende. Da $F_r = v/\sqrt{lg}$, er fastholdelse af F_r, og dermed funktionsværdien af f_1, ensbetydende med fastholdelse af lg/v^2 og med det funktionsværdien af f_2. Og resultatet $K_s = K_m \cdot (l_s^2 v_s^2)/(l_m^2 v_m^2)$, afledt af ligning (8), er identisk med ligning (7), når $l_s g/v_s^2 = l_m g/v_m^2$. Hvis ligningerne (2), (3) og (4) bruges til at finde α og γ som funktioner af β, fører det på tilsvarende måde igen til ligning (7).

2. Når jeg forsøger at bidrage til markedsføringen af dimensionsanalyse som et vigtigt tænkeværktøj for fysikere m.fl., bliver jeg undertiden spurgt, om et udtryk af en art som ligning (1) er repræsentativt for alle formler. Kan der ikke optræde summer af led med samme dimension i fysiske formler? Jo, lad os antage, at der i en fysisk formel indgår en linearkombination $aA + bB$ af de to led A og B med samme dimension. Det kan imidlertid omskrives til $aA(1 + bB/aA)$, hvor parentesen er dimensionsløs. Den kan derfor medregnes til k i formler som ligning (1). Så udtryk som ligning (1) *er* repræsentative. De dækker alle mulige formler, hvor symbolerne ikke repræsenterer tal, men fysiske størrelser med tilhørende krav om dimensionsmæssig homogenitet.

3. Måden, som jeg har valgt at vise løsningen af opgaven på, er, samtidigt med at være en løsning, også ment som en illustration af dimensionsanalyse. En kortere og mere indforstået løsning er: Blandt de dimensionsbærende inputvariable v, l, g og ρ, er det kun ρ, der har massedimension. Derfor må bølgemodstanden (en kraft) være proportional med ρ. Bølgemodstanden må altså være lig med ρ gange en funktion af v, l og g. Da disse kan kombineres til den dimensionsløse størrelse v^2/lg må der i denne funktion indgå en faktor, der på ukendt måde afhænger af $v^2/lg (= F_r^2)$, som derfor skal have samme værdi for skibet og for skibsmodellen.

4. Der findes betydeligt nemmere dimensionsanalytiske udfordringer end opgaven her. Men også da er det min erfaring, at mine studerende er pænt udfordret. Ikke så meget på grund af det algebraiske som på grund af vanskeligheden ved at identificere de styrende input variable på højre side af ligningen, der skal indgå i formlen til beregning af outputvariablen på venstre side. Altså i tilfældet her, at opstille ligning (1). Det er et ret almindeligt udsagn, at det er man først i stand til, når man ved, hvad resultatet skal blive. Men det mener jeg, er et helt forkert synspunkt. Det er rigtigt, at valget af inputvariable kræver fysisk forhåndsforståelse. Det kan man imidlertid sige om alle opgaveudfordringer, hvis ikke opgaverne først og fremmest inviterer til reproduktion af standardrutiner. I stedet for at mene, at man først skal have lært sig fysik på anden vis for at kunne magte dimensionsanalytiske argumenter, er arbejde med dimensionsanalyse, efter min mening, et meget velegnet middel til at tilegne sig dybere forståelser. Ved arbejdet med at udvælge de styrende inputvariable tvinges man netop til at orientere sig imod det essentielle i fænomenerne [1].

Breddeopgave 94. Brandslange

Inden næste nummer af Kvant udkommer, kan læserne eventuelt overveje løsningen til denne opgave fra breddekurset på RUC (fra samlingen af træningsopgaver fra opstarten af breddekurset i 1975, nr. 94 i rækken her i Kvant):

En brandslange er ført om et hushjørne. Der står en brandmand på hver side af hjørnet. Når vandet strømmer i slangen, skal brandmændene bruge kræfter for at undgå, at den retter sig ud. Hvor mange kræfter skal de bruge? Begrund svaret.

Løsning og kommentar bringes i næste nummer af Kvant.

Litteratur

[1] Se fx J.H. Jensen (2013) Introducing fluid dynamics using dimensional analysis, *Am. J. Phys.*, bind **81**, side 688–694.