Årets tal – et talteoretisk mønstereksempel og en god selskabsleg

Christian Marinus Taisbak

Årstallet 2021 har dette nummer, fordi munken Dionysius Exiguus, Johnny den Lille, i sin tid "omdøbte" årstallet 1285 efter Roms grundlæggelse til 532 efter Kristi fødsel. Dette årstal var rent matematisk bestemt, fordi 532 er 19 gange 28, og disse to tal spillede vigtige roller i fastlæggelsen af påskedag. Desuden vidste Dionysius, at tallet ikke var *helt* forkert. Indtil denne dag er der ikke enighed om, hvor lidt forkert det er i forhold til juleevangeliet om Jesu fødsel (Lukas kap. 2).

Figur 1. Dionysius Exiguus (ca. 470–550.)

Men 2021 spiller med i to morsomme matematiske spil. Det ene hedder *at opløse et tal i sine primfaktorer,* det andet *at finde to kvadrattal, hvis differens* er det forelagte tal. Ethvert helt tal er enten et primtal (som kun kan divideres med 1) eller et produkt af to eller flere primtal, hvor dette produkt er entydigt bestemt – en hovedsætning i talteori. Tallet 2021 er et produkt af kun to primtal, 43×47. Det særlige ved disse to er, at de ligger så tæt ved hinanden. Det gør det lettere at forklare og løse den opgave, vi nu vil tage fat på:

Hvis to primtal følger umiddelbart efter hinanden (som for eksempel 11 og 13), kaldes de tvillinger. Men 43 og 47 er matematiske "trillinger" sammen med det mellemliggende 45, som dog er adopteret, for 45 er ikke et primtal, da 3 må gå op i mindst et af tre på hinanden følgende ulige tal. De tre har en matematisk forbindelse, nemlig 2, idet 47 er 45 plus 2 og 43 er 45 minus 2, som vi skriver med symboler: $47 = 45 + 2$ og $43 = 45 - 2$.

Nu lyder en sand sætning om sådan en sum og differens: *To tals sum gange de samme tals differens er lig med differensen mellem tallenes kvadrater*, i vores tal: $(45 + 2) \times (45 - 2) = 45^2 - 2^2$. Som kontrol udregner vi: $2025 - 4 = 2021$. Årets tal er altså produktet af 43 og 47 og en differens mellem to kvadrattal 2025 og 4.

Vores lille nytårsleg – som kan bruges længe under isolationen – går nu således: Tænk på to tal (nok højst tocifrede, ikke nødvendigvis primtal), hvis forskel er et lige tal, for eksempel 11 og 19; gang det ene med det andet, $11 \times 19 = 209$. Opgave: **Find to kvadrattal, hvis forskel er 209.**

Næste trin er at finde midtertallet mellem 11 og 19 (15) og afstanden dertil fra hvert af tallene (4, den halve forskel); så er $11 = 15 - 4$ og $19 = 15 + 4$.

Af vores læresætning véd vi nu, at 209 er differensen mellem 15^2 og 4^2, $225 - 16$.

Alt dette har vi moret os med, fordi årets tal har en speciel primtalsopløsning. Derved fik vi anledning til at kende en af de vigtigste sætninger i elementær talteori, om to tals sum og differens. At den også er en af de allerældste sandheder om tal, kendt i Ægypten og Nærorienten for 3.000 år siden, gør vel kun årstallet ekstra interessant? Den udtrykkes og anvendes geometrisk i bog II af Euklids *Elementer* (fra ca. 300 f.Kr.), hvoraf Bog I-VI foreligger i ny oversættelse hos Gyldendal inden længe i år 43×47.