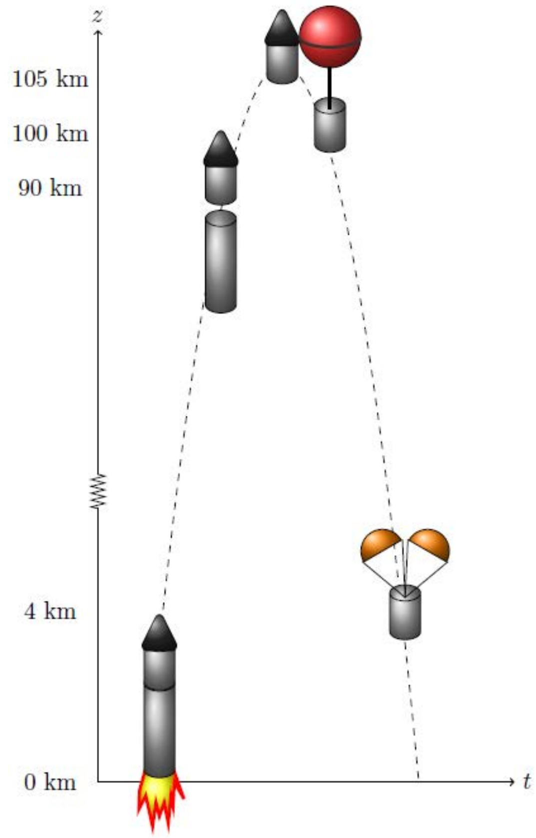
Ballut til bremsning af rumkapsel faldende fra 105 km

Af Sascha Stork, Niels Bohr Institutet, Københavns Universitet

Amatørvirksomheden Copenhagen Suborbitals har en vision om at opsende en bemandet rumkapsel til en højde af 105 km på deres fremtidige mission. På turen tilbage til Jorden skal rumkapslen bremses af en ballut. Gennem computersimulering er radius af denne ballut fundet til at skulle have en størrelse på min. 1,25 m.[1]

Copenhagen Suborbitals (CS) vil på sin fremtidige mission, Spica, opsende en bemandet rumraket til suborbitale højder. Målet er at få rumkapslen op i en højde af 105 km, hvor den skal have vendepunkt. På turen tilbage mod Jorden vil rumkapslen i en højde af 100 km skyde sin næse af og derved udløse en ballut (se nedenfor), som har til opgave at bremse rumkapslen. Balluten skal bremse rumkapslen, således at den i en højde af 4 km har en hastighed på under 200 km/t, da der her skal udløses faldskærme til at bremse rumkapslen på den resterende strækning. Disse faldskærme har netop en øvre grænse, også kaldet operativ hastighed, på 200 km/t. Det er gennem computersimulering af rumkapslens hastighed undersøgt, hvilken størrelse denne ballut måtte have, således at grænsebetingelsen om en sluthastighed under 200 km/t er opfyldt. Projektet beskæftiger sig altså med rumkapslens nedfart på strækningen fra 105 km til 4 km over havet.



Figur 1. Skitse af Spicamissionens forløb. Opsendelsen starter i venstre side af figuren og følger i tid den stiplede kurve mod højre. Balluten er vist ved den røde kugle og faldskærmene ved de orange halvcirkler. Opsendelse sker ved 0 km, separation af raket og rumkapsel ved 90 km, vendepunkt ved 105 km, ballutudløsning ved 100 km og faldskærmsudløsning ved 4 km [1].

I en tidligere artikel [2] har Mads Stenfatt, som er ansvarlig for CS' faldskærmssystemer, beskrevet, hvorledes det totale bremsesystem for rumkapslen virker. Systemet er udviklet til tidligere missioner, men overføres til Spicamissionen med de dertilhørende dimensioner.

En ballut er en hybrid mellem en ballon og en faldskærm (engelsk: ballute, som kommer af **ball**oon & parach**ute** (*ballon og faldskærm*)). Balluten blev i 1958 udviklet til at deaccelerere legemer med overlydshastigheder, således at legemernes sluthastighed blev som ønsket. Det oprindelige design er siden blevet optimeret. Ballutens anvendelsesformål har bl.a. været at bremse luftfartøjer samt forsinke bomber og mortérer. En ballut har et såkaldt "ram-air"-luftindtag. Denne type luftindtag har til formål at omdanne dynamisk tryk omkring et legeme i bevægelse til statisk tryk på indersiden af luftindtaget. Ballutens design gør, at luften fra indtagene ikke kan ekskluderes. Balluten holder derfor sin form og kan betragtes som et rigidt legeme. Luftindtagene er placeret under ballutens ringformede "burble fence" (se figur 2) for at sikre luftindtag hurtigt efter udløsning af balluten. Burble fence't genererer hvirvler i luften over sig, hvilket giver en uniform strømningsseparation, som har vist sig at være vigtigt for at holde en ballut stabil ved sub- og transsoniske hastigheder.

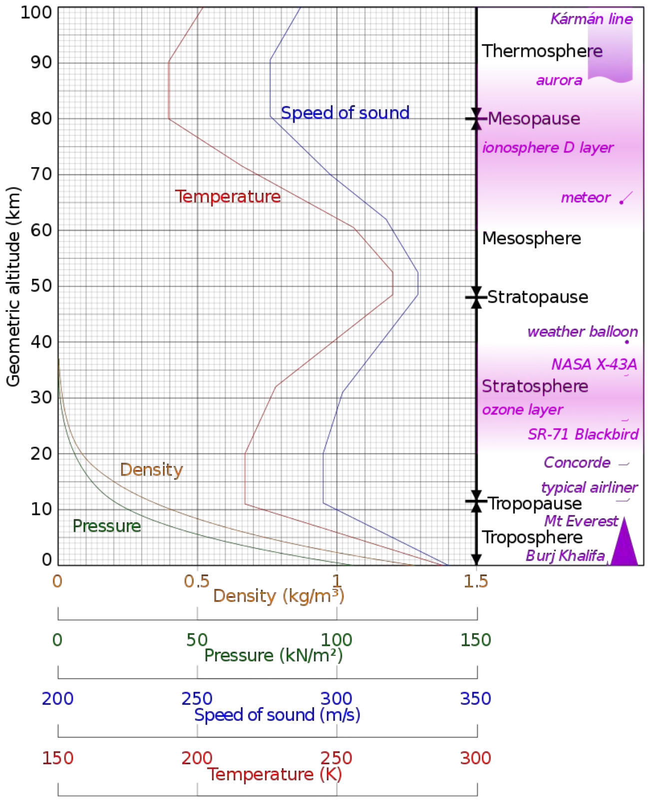
Figur 2. Demoballuter udviklet ved CS. Billedet her er fra tests på balluterne udført i vindtunnel.

På sin færd gennem atmosfæren vil rumkapslen passere forskellige atmosfærelag. Disse atmosfærelag er interessante, da luften i lagene har forskellige egenskaber. Rumkapslen vil passere gennem troposfæren, stratosfæren, mesosfæren samt termosfæren. Højdegrænser for atmosfærelagene varierer med Solens aktivitet. Derfor vil grænserne bl.a. være sæsonafhængige. Generelt gælder, at nær ækvator er lagene tykkere end nær

[1] Artiklen er et sammendrag af min bacheloropgave, og jeg takker Peter Ditlevsen for vejledning og gennemlæsning af artiklen.

polerne. Det er interessant at se på atmosfærelagene, da luftdensiteten omkring balluten har betydning for, hvor meget denne vil bremse rumkapslen.

I systemer indeholdende et stillestående legeme omsluttet af et fluid i bevægelse eller et stillestående fluid, som omgiver et legeme i bevægelse, vil der være en modstand tilstede. Denne modstand er en kraft (eng.: drag force), som har en bremsende effekt på hhv. fluidet eller legemet og virker modsatrettet bevægelsesretningen. Dvs. at et legeme påvirket af konstant acceleration, som bevæger sig gennem et stillestående fluid, vil miste hastighed grundet denne modstand. Dette gælder både aero- såvel som hydrodynamiske situationer. I aerodynamikken kaldes denne modstand for luftmodstand.



Figur 3. Atmosfærelag, som rumkapslen skal igennem. Som det ses af de grønne og orange grafer er både luftdensiteten og trykket forsvindende for højder over troposfæren, mens både temperaturen samt lydens hastighed i luft svinger lidt op og ned gennem Jordens atmosfære [3].

I projektet her vil rumkapslen med balluten udgøre legemet i bevægelse, mens den atmosfæriske luft omkring rumkapslen og balluten er fluidet. Fluidet betragtes som værende i ro. Luftmodstandskraften, F_D, er givet på følgende vis:

$$F_D = \frac{1}{2}\rho v^2 C_D A \tag{1}$$

$$= \frac{1}{2}\rho(z)\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 C_D \pi r^2 \tag{2}$$

I ligning (1) er ρ luftdensiteten, v er hastigheden af rumkapslen og balluten, C_D er formkoefficienten (eng.: drag coefficient) for balluten, mens A er tværsnitsarealet af balluten. For denne simulering er både luftdensiteten samt hastigheden variable i dette udtryk, mens formkoefficienten og tværsnitsarealet er konstanter. Formkoefficienten er et enhedsløst udtryk, som hovedsageligt afgøres af legemets form. I denne simulering er der ikke taget højde for, hvor meget rumkapslen bidrager til luftmodstanden. Det er altså udelukkende luftmodstanden på balluten, som indgår i beregningerne. Derved er C_D- og A-værdierne for balluten gældende for hele systemet. C_D for balluten er i simuleringen sat til at være 0,6, hvilket er fastsat eksperimentelt ved test i vindtunnel. Resultater for bestemmelse af formkoefficienten kan findes af [2]. Dermed er ligning (2) gældende for simuleringen, hvor r er radius af balluten.

Den anden kraft, som virker i systemet ud over luftmodstanden, er tyngdekraften. Grundet den store vertikale afstand, som rumkapslen vil bevæge sig over, kan tyngdekraften ikke antages konstant over denne strækning. For tyngdekraften gælder:

$$F_G = mg(z) \tag{3}$$

$$= m\frac{Gm_E}{(R_E+z)^2} \tag{4}$$

Gravitationskonstanten, G, er 6,67384 $\cdot 10^{-11}$ $\frac{\mathrm{Nm}^2}{\mathrm{kg}^2}$, Jordens masse, m_E, er $5,97 \cdot 10^{24}$ og Jordens radius R_E er $6,37 \cdot 10^6$ m, mens z er rumkapslens højde over havet.

Hvis hverken luftdensiteten eller tyngeaccelerationen havde været positionsafhængige, ville man ved at tage udgangspunkt i ligning (1), (3) samt Newtons 2. lov kunne finde hastigheden ved

$$F_T = F_G + F_D \tag{5}$$

$$ma = -mg + \frac{1}{2}\rho v^2 C_D A \tag{6}$$

$$v(t) = -\sqrt{\frac{g}{\frac{1}{2m}\rho C_D A}}\tanh\left(t\sqrt{\frac{1}{2m}\rho C_D A g}\right) \tag{7}$$

I grænsetilfældet for tiden gående mod uendelig gælder, at rumkapslen vil opnå terminalhastighed, hvor luftmodstands- og tyngdekraften er lige store og modsatrettede. Når et legeme har opnået terminalhastighed, accelererer det ikke længere, men bevæger sig med konstant hastighed efter Newtons 1. lov. Terminalhastigheden indstiller sig over tid efter følgende udtryk:

$$\lim_{t\to\infty} v(t) = \sqrt{\frac{g}{\frac{1}{2m}\rho C_D A}} \tag{8}$$

Ved at isolere radius i ligning (8) har CS beregnet, at størrelsen af deres foreløbige ballut skal have en radius på 0,98 m. Begrænsninger i produktionen har dog medført en radius på 0,94 m. Yderligere information om disse beregninger samt ballut og faldskærme udviklet ved CS kan læses i [2].

Ligning (6) kan dog, grundet luftdensitetens samt tyngdeaccelerationens positionsafhængighed, ikke anses for at være en ordinær 1. ordens differentialligning, men er en koblet differentialligning af formen

$$\frac{dv}{dt} = -g(z) + \frac{1}{2m}\rho(z)\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 C_D \pi r^2. \tag{9}$$

Ovenstående udtryk er løst ved numerisk integration efter 4. ordens Runge-Kutta-metoden.

Metode

Problemløsningen er holdt endimensionel langs en radial akse ud fra Jordens centrum med nulpunkt ved havoverfladen.

Bestemmelsen af værdierne for luftdensiteterne er fastsat ved at lave en modelfunktion til tabelværdierne for luftdensiteterne opgivet i den statistiske model, U.S. Standard Atmosfære, som gælder i området 0-80 km. Modelfunktionen er anvendt til at ekstrapolere værdier op til 105 km. Modelfunktionen er en lineær funktion til logaritmen af luftdensiteten:

$$\ln(\rho) = az + b \tag{10}$$

Rumkapslens position over havoverfladen er angivet som z.

De indgående parametre, den totale masse for ballut og rumkapsel, m, samt radius, r, som indgår i ligning (9), er diskrete værdier. Der gælder, at $r \in [0,9; 1,55]$ m med 5 cm-intervaller og $m \in [300; 350]$ kg med 2,5 kg-intervaller. Simuleringen finder løsninger for rumkapslens hastighed i en højde af 4 km over havet for samtlige kombinationer af masse og radius. Dette gøres ved numerisk integration af hastigheden, v, efter 4. ordens Runge-Kutta-metoden i et "for-loop":

$$\begin{aligned}
k_1(t) &= -g(z_i)\cdot dt + \frac{1}{2m}\rho(z_i)v_i(t)^2 C_D A \cdot dt \\
v_{k_1}(t) &= v_i(t) + k_1\frac{dt}{2} \\
k_2(t) &= -g(z_i)\cdot dt + \frac{1}{2m}\rho(z_i)v_{K_1}(t)^2 C_D A \cdot dt \\
v_{k_2}(t) &= v_i(t) + k_2\frac{dt}{2} \\
k_3(t) &= -g(z_i)\cdot dt + \frac{1}{2m}\rho(z_i)v_{K_2}(t)^2 C_D A \cdot dt \\
v_{k_3}(t) &= v_i(t) + k_3 \\
k_4(t) &= -g(z_i)\cdot dt + \frac{1}{2m}\rho(z_i)v_{K_3}(t)^2 C_D A \cdot dt
\end{aligned}$$

$$v_{i+1}(t+dt) = v_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \tag{11}$$

I samme loop er positionen, z, parallelt integreret:

$$z(t+dt)_{i+1} = z_i(t) + v_i(t)\cdot dt \tag{12}$$

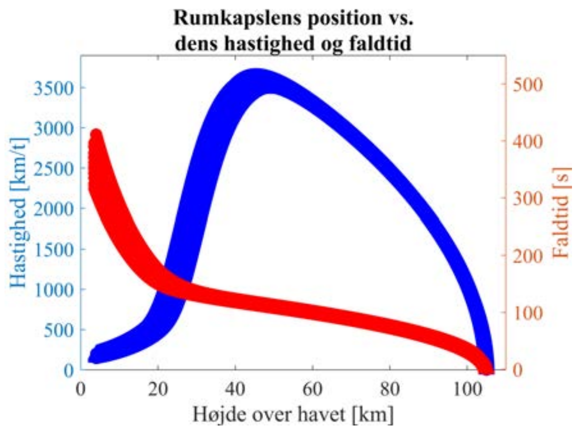
I ovenstående ligninger beskriver i en iteration af integrationen, mens dt er tidsintervallet for integrationen, hvilket er sat til 0,1 s.

Grænsebetingelserne for integrationen fastsættes med "else"/"if"-betingelser og er som følger; starthastigheden er $v_0 = 0$, da rumkapslen er i et vendepunkt. Startpositionen er $z_0 = 105.000$ m, da dette påtænkes at være højden for vendepunktet. Fra 105.000 m til 100.000 m vil kun tyngeaccelerationen bidrage til hastighedsberegningerne, da balluten endnu ikke er udløst. Fra $z <$ 100.000 m vil luftmodstanden bidrage til beregningen, hvilken er af den form, som fremgår af ligningerne (11). Første gang rumkapslen opnår en position, hvor $z <$ 4.000 m, stoppes integrationen. Hastigheden i den pågældende højde noteres som sluthastigheden v_f. Såfremt $v_f <$ 200 km/t, anses kombinationen af radius og masse for at være gyldig. Ellers er kombination ugyldig. Forløbet for gyldige løsninger vises grafisk i resultatafsnittet.

Resultater

Ved at anvende Runge-Kutta-metoden til 4. orden opnås altså en simulering af hele rumkapslens hastighedsforløb gennem nedfarten. Simuleringen tillader rumkapslen at have en acceleration. Beregninger ud fra terminalhastigheden tillader derimod igen acceleration for rumkapslen i den pågældende position.

Af figur 4 fremgår hastighed og tid som funktion af position for samtlige gyldige kombinationer af ballutradius og total masse for ballut og rumkapsel.



Figur 4. Hastigheder og positioner regnet efter 4. ordens Runge-Kutta-metode for 171 gyldige kombinationer af ballutradius og rumkapsel samt ballutmasse, hvilket er kombinationer, som medfører en sluthastighed for rumkapslen på under 200 km/t. Blå grafer følger venstre 2. akse og indikerer hastigheden af rumkapslen. Røde grafer følger højre 2. akse og indikerer nedfaldstiden for rumkapslen.

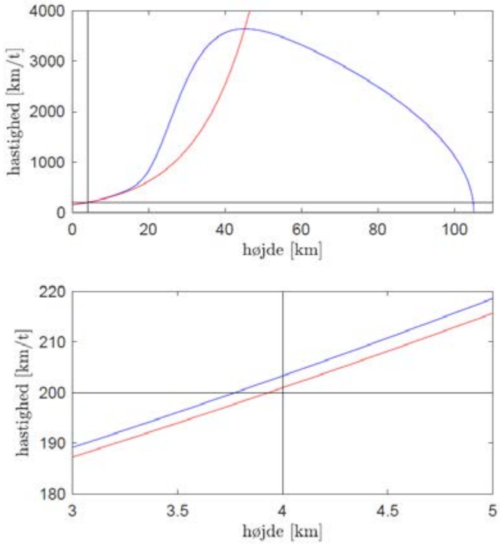
I løbet af nedfarten vil de masse/radius-kombinationer, som opfylder grænsebetingelserne, give rumkapslen en tophastighed på mellem 3494,1 og 3633,8 km/t. Nedfarten vil vare et sted mellem 319,8 og 414,1 s. For rumkapslen med en total masse på 350 kg og ballutradius på 1,25 m, hvilket er den mindste ballutradius, som kan opfylde betingelserne for den største masse af rumkapslen, vil nedfarten vare 327,5 s, mens tophastigheden vil være 3620,7 km/t.

Sammenholdes figur 3 og 4, ses det som forventet, at luftdensiteten har en afgørende betydning for ballutens bremsning af rumkapslen. Rumkapslen accelererer mod Jorden fra 105 km til ca. 50 km, uagtet ballutens størrelse. Ballutens bremseeffekt er altså mere eller mindre ubetydelig gennem rumkapslens færden i termo- og mesosfæren. Ved omkring 50 km rammer rumkapslen stratosfæren, hvor luftdensiteten kommer op på en størrelsesorden af 10^{-3} kg/m^3. Lige før rumkapslen rammer stratosfæren, opnår den tophastighed. Herfra deaccelererer rumkapslen på resten af sin færden mod Jorden. Når rumkapslens position er omkring tropopausen, sker en yderligere ændring i deacceleration.

Simuleringen er kørt én gang med en total masse for rumkapsel og ballut på m = 350 kg og en radius på r

= 0,94 m, som er de værdier, CS har anvendt for deres foreløbige ballut. Resten af værdierne og antagelserne er som ved den øvrige simulering. Dette resulterer i en sluthastighed på 259,8 km/t i højden 3997,5 m o.h. med en nedfartstid på 265,3 s.

Simuleringen er ligeledes kørt således, at hastigheden er regnet ud fra antagelsen om terminalhastighed (ligning (8)). Det fremgår af denne udregning, at de to beregninger (ligning (8) og (9)) har skæringspunkt og dermed ens hastigheder i omkring 45 km, hvilket er vist i figur 5. Før dette ligger terminalhastigheden højere end den tids- og positionsafhængige hastighed. Efter skæringspunktet ligger den højere. Afvigelserne er så signifikante, at teorien om terminalhastighed må forkastes.



Figur 5. Figurerne viser nedfartshastigheden som funktion af rumkapslens højde. Blå grafer er hastigheder regnet ved simulering efter 4. ordens Runge-Kutta-metoden (ligning (11)), mens røde grafer er regnet efter udtrykket for terminalhastighed (ligning (8)). Øverste figur viser hastighederne for de to metoder over hele nedfarten, mens nederste figur er et udsnit for sluthøjde $\pm$ 1 km. Til udregningerne her er anvendt en masse på m = 300 kg og en ballutradius på r = 1,2 m.

Diskussion

Det er antaget, at U. S. Standard Atmosfæremodellen kan anvendes til at beskrive luftdensiteten omkring rumkapslen. Den forventelige lokation for raketopsendelsen vil være akkurat ud for dansk territorium, hvilket ligger inde for de breddegrader, hvor modellen er gældende. Dog tager modellen ikke højde for evt. lokale vejrforhold eller lignende.

I simuleringen er ikke medregnet rumkapslens egen bremseeffekt, hvilket vil bevirke højere sluthastigheder for simuleringen end under de faktiske forhold. CS har dog medregnet denne ved deres beregning ud fra teorien om terminalhastighed.

Problemet er holdt endimensionelt. Dog vil opsendelsen finde sted i det virkelige, tredimensionelle rum, hvor bl.a. effekter som Corioliskraften spiller ind. Den øvre grænse for ballutens størrelse af radius er valgt arbitrært, da $r = 1,55$ m medfører en sluthastighed, som ligger 22-28 % lavere end 200 km/t, hvilket synes passende. Større radius medfører lavere sluthastigheder.

Af figur 5 fremgår det, at hastighedskurven fundet ved udregninger af terminalhastigheden divergerer, når rumkapslen befinder sig i højder over stratosfæren. Modellen er altså slet ikke gældende herover. I troposfæren forløber udregningerne simuleret ved Runge-Kutta 4. ordens-metoden og ved terminalhastigheden mere lig hinanden. Beregninger med terminalhastigheden hviler på en antagelse om, at rumkapslen har opnået konstant hastighed, hvilket ikke synes at være tilfældet. Simulering efter Runge-Kutta 4. ordens-metoden viser, at rumkapslen *ikke* har opnået terminalhastighed ved 4 km, hvorfor metoden med at regne efter terminalhastighed må anses for at være utilstrækkelig. Simuleringen viser ligeledes, at rumkapslen vil fare ind i stratosfæren med en hastighed, som ca. er 295-435 km/t hurtigere end tidligere antaget [2].

Den foreløbig ballut fra CS har en radius, som er 31 cm mindre, end denne simulering angiver, at den bør være. Jf. simuleringen vil deres foreløbige ballut derfor være for lille til at overholde faldskærmenes operative hastighed.

Sammenholdes kurverne over hastighedsforløbene i denne artikel med g-load-illustrationen i den tidligere artikel, findes det, at der er behov for en ny gennemregning af g-kræften ud fra den nye information, som dette projekt har givet. G-påvirkningen er størst, når accelerationen har ekstremapunkter, hvilket den har, når hastighedskurverne er stejlest. Ved aflæsning af graferne i figur 4 er dette omkring 25 km og 105 km, mens de tidligere resultater angiver, at det skulle være omkring 45 km [2]. Der opfordres derfor til, at de tidligere resultater for g-påvirkningen ses igennem.

Konklusion

Balluten for CS' Spicamission skal have en radius på min. 1,25 m for at opnå hastigheder under 200 km/t, hvis den totale masse for rumkapsel og ballut ønskes at være 350 kg. Derfor opfordres CS til at designe en større ballut til Spicamissionen end deres foreløbige.

Litteratur

[1] Copenhagen Suborbitals, copenhagensuborbitals.com/missions/spica.

[2] M. Stenfatt (2016) "At bringe en bemandet rumkapsel til sikker landing", *Kvant*, bind **27**, nr. 1, side 24–29.

[3] en.wikipedia.org/wiki/Atmosphere_of_Earth# Stratification.

[4] Engineering ToolBox (2003) U. S. Standard Atmosphere, www.engineeringtoolbox.com/standard-atmosphere-d_604.html

Sascha Stork er BSc i fysik. Hun interesserer sig for ekstremsport og springer bl.a. faldskærm i sin fritid. Ønsker at anvende fysik til at fremme ekstremsportatleters performance i fremtiden gennem designoptimering af diverse udstyr.