Klodesprængning
- breddeopgave 79 med didaktisk kommentar

Af Jens Højgaard Jensen, IMFUFA, INM, RUC.

Mit formål med artikelserien om breddeopgaver er – udover at gøre opmærksom på RUCs fysikuddannelse – dobbelt: Dels udvælger jeg opgaverne, så de kan have interesse som fysikproblemer i egen ret. Dels udvælger jeg dem med henblik på at kunne knytte didaktiske overvejelser til dem af interesse for fysikundervisere. I første omgang i forhold til universitetsundervisning. Men i anden omgang kunne der måske også trækkes paralleller til andre undervisningsniveauer.

Breddeopgave 79. Klodesprængning

Hvilken indflydelse har massetætheden på, hvor hurtigt kloder kan rotere om sig selv uden at sprænges? Begrund svaret.

Løsning

Lad os for nemheds skyld antage, at en klode har samme massetæthed ρ overalt. Vi kalder vinkelhastigheden for klodens rotation om sig selv ω, og klodens radius R.

En prøvemasse m på klodens overflade ved klodens ækvator er da påvirket af gravitationskraften

$$F_{\mathrm{G}} = Gm\frac{4}{3}\pi R^3\rho\frac{1}{R^2} = Gm\frac{4}{3}\pi R\rho \tag{1}$$

indad. G er gravitationskonstanten. Samtidig er prøvemassen påvirket af centrifugalkraften

$$F_{\mathrm{C}} = mR\omega^2 \tag{2}$$

udad. Kloden sprænges, hvis F_{C} er større end F_{G}. Og det ses at ske for

$$\omega > \sqrt{4\pi G\rho/3}. \tag{3}$$

Det er bemærkelsesværdigt, at klodens størrelse, når vi spørger til den kritiske rotationshastighed, ikke spiller nogen rolle.

Kommentar

Opgaveløsningen er ikke afhængig af den simplificerende antagelse om, at massen af kloden er homogent fordelt. Vi kan nøjes med at antage samme massefylde i samme dybde. Så er middelværdien af massefylden givet ved

$$<\rho>= \int_0^R 4\pi r^2\rho(r)dr/V, \tag{4}$$

hvor V er klodens volumen $\frac{4}{3}\pi R^3$. Ifølge Newtons teorem om massetiltrækningen fra en homogen kugleskal kan vi i stedet for ligning (1) skrive:

$$F_{\mathrm{G}} = Gm\int_0^R 4\pi r^2\rho(r)dr/R^2 = Gm\frac{4}{3}\pi R <\rho> . \tag{5}$$

For en lagdelt klode ses betingelsen i ligning (3) derfor stadig at gælde, blot skal ρ erstattes med $<\rho>$.

Opgaven kan også besvares ved dimensionsanalyse. Den kritiske rotationshastighed ω_{kr} kan tænkes at afhænge af ρ (eller $<\rho>$), G og R. Vi antager da:

$$\omega_{\mathrm{kr}} = k\rho^\alpha G^\beta R^\gamma. \tag{6}$$

Her er k nødvendigvis et rent tal, da der indgår tidsdimension i G, men ikke i ρ og R, hvorfor der ikke kan dannes en dimensionsløs kombination af ρ, G og R. Kravet om ens dimension på begge sider af lighedstegnet indebærer:

$$\mathrm{T}^{-1} = (\mathrm{ML}^{-3})^\alpha(\mathrm{M}^{-1}\mathrm{L}^3\mathrm{T}^{-2})^\beta\mathrm{L}^\gamma. \tag{7}$$

Da M for masse, L for længde og T for tid, som valgte basisdimensioner, ikke kan reduceres til hinanden, skal deres potenser stemme overens hver for sig. Det giver ligningssystemet:

$$\mathrm{M}:\ 0 = \alpha - \beta \tag{8}$$
$$\mathrm{L}:\ 0 = -3\alpha + 3\beta + \gamma \tag{9}$$
$$\mathrm{T}:\ \ -1 = -2\beta, \tag{10}$$

med den entydige løsning $\alpha = \frac{1}{2}, \beta = \frac{1}{2}$, og $\gamma = 0$, svarende til ligning (3). At ω_{kr} ikke afhænger af klodens størrelse, kunne vi ikke have gættet forud for dimensionsanalysen uden at opstille ligningerne (1) og (2). Men det viser sig altså også som en konsekvens af dimensionsanalysen.

Opgaver som denne, der lægger op til besvarelser på flere måder og på flere niveauer, er en god ting i breddeopgavegenren. Vi foretrækker at komme svagere og stærkere studerende samtidigt i møde herved, fremfor ved den traditionelle opbygning af eksamensopgaver med hjælpespørgsmål undervejs til den endelige opgaveløsning.

Det er ved løsningen af opgaven forudsat, at planeten er sfærisk. Men en roterende planet vil være fladtrykt på grund af centrifugalkræfterne. En gennemgang af problemet for en fladtrykt planet er omfattende. Det kunne være en udfordring for et projektarbejde, men kan ikke fungere som emne for en breddeopgave. Dog kan vi ved dimensionsanalyse komme et stykke af vejen. Hvis vi kalder planetens radier ved polerne og ved ækvator for henholdsvis T og R – i grænsesituationen for sprængning – giver dimensionsanalysen:

$$\omega_{\mathrm{kr}} = f\left(\frac{T}{R}\right)\sqrt{G\rho}, \tag{11}$$

hvor f er en ukendt funktion af T/R. Den kritiske værdi af ω er altså igen uafhængig af planetens størrelse, men den afhænger af dens form ved den kritiske værdi af ω. Både ligning (3) og (11) er udregnet under forudsætning af, at planetens materiale er som fx en bunke grus, en væske eller en gas, dvs. et materiale uden stærk intern sammenhængskraft i forhold til gravitationskræfterne.

Breddeopgave 80. Bobler

Denne opgave er fra breddekurset på RUC (fra eksamen januar 2018).

En vandtank har fået skruet låget lufttæt fast efter at være blevet delvist fyldt med vand. Ved et uheld slås der et hul i bunden af tanken. Hvor meget vand løber ud af tanken, før der begynder at boble luft ind i den? Begrund svaret.

Løsning og kommentar følger på næste side.