

# Åreforkalkning - - breddeopgave 77 med didaktisk kommentar

Af Jens Højgaard Jensen, IMFUFA, INM, RUC.

Mit formål med artikelserien om breddeopgaver er – udover at gøre opmærksom på RUCs fysikuddannelse – dobbelt: Dels udvælger jeg opgaverne, så de kan have interesse som fysikproblemer i egen ret. Dels udvælger jeg dem med henblik på at kunne knytte didaktiske overvejelser til dem af interesse for fysikundervisere. I første omgang i forhold til universitetsundervisning. Men i anden omgang kunne der måske også trækkes paralleller til andre undervisningsniveauer.

Her bringes løsning og kommentar til opgaven fra forrige nummer samt en ny opgave. Opgaven i sidste nummer af KVANT var denne breddeopgave (nr. 77 i rækken her i KVANT):

## Breddeopgave 77. Åreforkalkning

Hvor meget skal blodtrykket procentvis øges for at sikre den samme blodgennemstrømning ved 5 % formindskelse af årenes indvendige diametre på grund af åreforkalkning? Begrund svaret.

### Løsning

Lad os lave et overslag ved at regne på en stationær laminar strømning gennem et rør. Vi vil gerne vide, hvor meget trykgradienten i åren skal øges for at sikre den samme blodgennemstrømning ved 5 % formindskelse af årenes indvendige diametre. Vi leder efter en formel, der udtrykker trykgradienten  $dP/dx$  som funktion af blodets volumenstrøm  $Q$ , årens radius  $r$  og blodets viskositet  $\eta$ ,

$$\frac{dP}{dx} = -(\text{ukendt tal})Q^\alpha r^\beta \eta^\gamma \quad (1)$$

Dimensionen af de indgående størrelser er  $[dP/dx] = \text{ML}^{-2}\text{T}^{-2}$ ,  $[Q] = \text{L}^3\text{T}^{-1}$ ,  $[r] = \text{L}$  og  $[\eta] = \text{ML}^{-1}\text{T}^{-1}$ . Kravet om samme dimension på begge sider af lighedstegnet medfører derfor

$$\text{ML}^{-2}\text{T}^{-2} = (\text{L}^3\text{T}^{-1})^\alpha \text{L}^\beta (\text{ML}^{-1}\text{T}^{-1})^\gamma \quad (2)$$

$$= \text{M}^\gamma \text{L}^{3\alpha+\beta-\gamma} \text{T}^{-\alpha-\gamma}, \quad (3)$$

og ved afstemning af potenserne af basisdimensionerne M, L og T hver for sig, fås ligningssystemet

$$\text{M}: 1 = \gamma \quad (4)$$

$$\text{L}: -2 = 3\alpha + \beta - \gamma \quad (5)$$

$$\text{T}: -2 = -\alpha - \gamma, \quad (6)$$

med løsningen  $(\alpha, \beta, \gamma) = (1, -4, 1)$ . Den efterspurgte formel er derfor af dimensionsgrunde nødvendigvis

$$\frac{dP}{dx} = -(\text{ukendt tal})Q r^{-4} \eta \quad (7)$$

Formlen kan bruges til at se på en ændring  $d(dP/dx)$  af  $dP/dx$  som følge af en ændring  $dr$  af  $r$ ,

hvor  $Q$  og  $\eta$  samtidigt er fastholdt. Ved differentiation af ligning (7) med hensyn til  $r$  fås

$$d(dP/dx) = -(\text{ukendt tal})Q (-4r^{-5} dr) \eta. \quad (8)$$

Herefter fås ved division af ligning (8) med ligning (7)

$$\frac{d(dP/dx)}{(dP/dx)} = -\frac{4dr}{r}. \quad (9)$$

En relativ formindskelse  $-dr/r$  af  $r$  på 5 % hænger derfor sammen med en relativ forøgelse af trykgradienten og dermed blodtrykket på 4 gange 5 %, altså 20 %. Hvis den samme blodgennemstrømning skal opretholdes.

### Kommentar

Det "ukendte tal" vides at være  $8/\pi$  ifølge Poiseuilles lov. Hvis en studerende til eksamen havde husket Poiseuilles lov og taget udgangspunkt i den, havde det været i orden. Da hjælpemidler ikke er tilladt ved eksamen, bortset fra et på begge sider beskrevet A4-ark efter eget valg, er det imidlertid usikkert, om de studerende har loven præsent. Men de skal så kunne udlede den ved dimensionsanalyse, som vist.

En toppræstation ville være at undersøge, hvad svaret på opgaven er, hvis det ikke antages, at blodet strømmer laminart, men tværtimod gennemført turbulent. Hvad hvis arbejdet, som trykforskellene udfører, ikke som ved laminar strømning bliver omsat til varme afhængig af størrelsen af  $\eta$ , men derimod bliver omsat til makroskopisk kinetisk energi i hvirvelbevægelser afhængig af blodets massefylde  $\rho$ ? Så skal dimensionsanalysen gennemføres med  $\rho^\gamma$  på  $\eta^\gamma$ 's plads i ligning(1). I stedet for ligning (2)-(3) får vi da

$$\text{ML}^{-2}\text{T}^{-2} = (\text{L}^3\text{T}^{-1})^\alpha \text{L}^\beta (\text{ML}^{-3})^\gamma \quad (10)$$

$$= \text{M}^\gamma \text{L}^{3\alpha+\beta-3\gamma} \text{T}^{-\alpha}, \quad (11)$$

som fører til ligningssystemet

$$\text{M}: 1 = \gamma \quad (12)$$

$$\text{L}: -2 = 3\alpha + \beta - 3\gamma \quad (13)$$

$$\text{T}: -2 = -\alpha, \quad (14)$$

med løsningen  $(\alpha, \beta, \gamma) = (2, -5, 1)$ . Den efterspurgte formel er derfor af dimensionsgrunde

$$\frac{dP}{dx} = -(\text{ukendt tal})Q^2 r^{-5} \rho \quad (15)$$

i stedet for ligning (7).

Modsat ligning (7) kan ligning (15) dårligt udregnes på anden måde end ved dimensionsanalyse.

Svarende til udledningen af ligning (8) fra ligning (7) og konklusionen ud fra den, viser ligning (15), at trykket og trykgradienten i den fuldt udviklede turbulente grænse, på grund af  $-5$  eksponenten for  $r$ , procentvis skal øges med 5 gange  $5\% = 25\%$  for at opretholde den samme blodgennemstrømning ved en  $5\%$  mindskning af årernes diameter.

Der er altså ikke så stor forskel på besvarelsen af opgaven i den turbulente og den laminare grænse. I intervallet med Reynolds tal herimellem kunne man derfor (men ikke med sikkerhed) antage et svar i samme retning som for de store og små Reynolds tal. Regnestykket er idealiseret ved at se bort fra, at årerne er elastiske med radier, der indstiller sig efter blodtrykket. Og blodstrømningen foregår pulseret og ikke som en jævn strømning. Alligevel skønner min kollega Johnny Ottesen, der som matematisk biolog professionelt har arbejdet med blodgennemstrømning i årerne, at svaret 20-25% ikke er noget dårligt bud på en besvarelse af opgaven.

Opgaven giver som antydning muligheder for besvarelser på flere niveauer. Det kræver mere at udlede ækvivalenten til Poiseuilles lov ved dimensionsanalyse end at have loven ved hånden og rykke rundt på den til brug her. Og det kræver endnu mere at overveje og gennemføre den supplerende udledning i den turbulente grænse for at undersøge, hvor meget konklusionen i den laminare grænse afhænger af at være i denne grænse. Vores vurdering er, at det er godt, hvis breddeopgaverne

i almindelighed, som her, giver mulighed for besvarelser på flere niveauer. Det bidrager til at gøre det muligt at formulere opgaverne som et enkelt spørgsmål, uden at det bliver svært at differentiere imellem opgavebesvarelserne. Vi ønsker ikke den traditionelle opbygning af opgaver via hjælpespørgsmål, med mulighed for at skrabe nok point sammen ved eksamen via hjælpespørgsmålene, uden at hovedspørgsmålet berøres. Det skyldes først og fremmest, at vores undervisning baserer sig på tidligere eksamenssæt med den indholdsmæssige styring, der ligger heri. Både svage og stærke studerende skal fastholdes på interessen i at svare på hovedspørgsmålene i undervisningen. Deres udbytter af undervisningen er forskellige, hvilket ses af deres eksamensbesvarelser. Men de får den samme oplevelse af, hvad målene med undervisningen er.

### Breddeopgave 78. Korrespondens mellem Doppler- og Compton-effekten

Inden næste nummer af KVANT udkommer, kan læserne eventuelt overveje løsningen til denne opgave fra breddekurset på RUC (fra eksamen februar 2017, nr. 78 i rækken her i KVANT):

*Temperaturen på 200 millioner grader af plasmaet i fusionsreaktoren JET måles ved at undersøge hastighedsfordelingen af plasmapartiklerne ved hjælp af frekvensfordelingen af reflekteret laserlys fra partiklerne. Er det det reflekterede lys fra elektronerne eller fra ionerne i plasmaet, der giver den bedste temperaturbestemmelse? Begrund svaret.*

Løsning og kommentar bringes i næste nummer af KVANT.

## Foreningsnyt – kommende foredrag

Dato	Tid	Foredragstitel	Foredragsholder	Forening
<b>Oktober</b>				
15/10	19.15	Tyngdebølger, kilonovaer og oprindelsen af guld	Jonatan Selsing	AS (Kbh)
22/10	19.00	Tyngdebølger, kilonovaer og oprindelsen af guld	Jonatan Selsing	AS (Aarh)
22/10	19.30	Vulkanisme: årsag og virkning	Paul Martin Holm	SNU
<b>November</b>				
5/11	19.15	Udforskning af det højenergetiske univers	Desiree Della Monica Ferreira	AS (Kbh)
12/11	19.00	Udforskning af det højenergetiske univers	Desiree Della Monica Ferreira	AS (Aarh)
12/11	19.30	Pandemier – historiens store dræbere	Nils Strandberg Pedersen	SNU
26/11	19.15	Verdens mest avancerede robotteleskop	Mads Fredslund Andersen	AS (Kbh)
<b>December</b>				
3/12	19.00	Verdens mest avancerede robotteleskop	Mads Fredslund Andersen	AS (Aarh)
10/12	19.30	Når Jorden står for skud – asteroidenedslag og livets udvikling på Jorden	Henning Haack	SNU
<b>Januar</b>				
21/1	19.15	Solar activity and cosmic rays	Heidi Korhonen	AS (Kbh)
28/1	19.00	Solar activity and cosmic rays	Heidi Korhonen	AS (Aarh)
28/1	19.30	Udforskningen af Mars – to nye missioner	Morten Bo Madsen	SNU
<b>Februar</b>				
18/2	19.15	ICECUBE	Morten Ankersen Medici	AS (Kbh)
25/2	19.00	ICECUBE	Morten Ankersen Medici	AS (Aarh)
25/2	19.30	Kepler-missionen: Stjernesang og planetdans	Jørgen Christensen-Dalsgaard	SNU

**AS (Kbh):** Astron. Selskab (Kbh), Aud. 2, H.C. Ørsted Institut, Universitetsparken 5, 2100 København Ø (astronomisk.dk).

**AS (Aarh):** Astron. Selskab (Aarh), Matematisk Institut, AU, Ny Munkegade 118, Bygn. 1530, Aud.F/G122, 8000 Aarhus C.

**SNU:** Aud. 1, H.C. Ørsted Institut, Universitetsparken 5, 2100 København Ø (naturvidenskab.net, facebook.com/SNU1824).