Tidevandsfelter – breddeopgave 71 og 72 med didaktisk kommentar

Af Jens Højgaard Jensen, IMFUFA, INM, RUC.

Mit formål med artikelserien om breddeopgaver er – udover at gøre opmærksom på RUCs fysikuddannelse – dobbelt: Dels udvælger jeg opgaverne, så de kan have interesse som fysikproblemer i egen ret. Dels udvælger jeg dem med henblik på at kunne knytte didaktiske overvejelser til dem af interesse for fysikundervisere. I første omgang i forhold til universitetsundervisning. Men i anden omgang kunne der måske også trækkes paralleller til andre undervisningsniveauer.

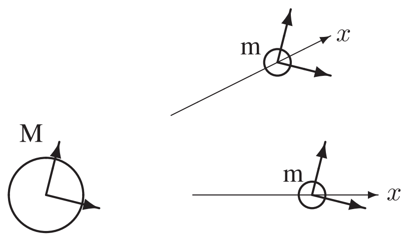
Her bringes løsning og kommentar til opgaverne fra forrige nummer samt en ny opgave. Opgaverne i sidste nummer af KVANT var disse breddeopgaver (nr. 71 og 72 i rækken her i KVANT):

Breddeopgave 71 og 72: Tidevandsfelter

71. *Hvordan kan det være, at det med god tilnærmelse går godt at regne med, at inertiens lov gælder i et koordinatsystem med centrum i Solen og faste akser i forhold til stjernerne i vores galakse, når vi ved, at Solen deltager i galaksens rotation?*
72. *Indtræffer springflod ved fuldmåne, nymåne eller halvmåne? Begrund svaret.*

Løsninger

Det væsentlige angående tidevandsfelter kan forstås ud fra følgende figur:



Figur 1. Koordinatsystem (m) accelereret i forhold til inertialsystem (M).

På figuren er markeret to legemer M og m med masserne M og m. For nemheds skyld antager vi, at M er så mange gange større end m, at der til det store legeme kan knyttes et inertialsystem med nulpunkt i det store legemes centrum, medens det lille legeme kredser omkring det store på grund af deres gensidige tyngdekraftstiltrækning. Accelerationen $\boldsymbol{a}$ af det lille legeme er da ifølge Newtons II lov rettet imod centrum af det store legeme og har størrelsen

$$a = GM/R^2, \tag{1}$$

hvor G er gravitationskonstanten og R afstanden imellem de to legemers centre.

På figuren er også indtegnet et koordinatsystem med nulpunkt i det lille legemes centrum, og akser der ikke drejer i forhold til inertialsystemet. Hvis vi vil beskrive bevægelser relativt til dette koordinatsystem, skal vi, udover de kræfter, der også er virksomme i inertialsystemet, medregne en systemkraft (ofte kaldet en fiktiv kraft, selvom den er virkelig nok) modsatrettet $\boldsymbol{a}$ af størrelsen a gange massen af det, der bevæger sig. Tilstedeværelsen af det store legeme har derfor to samtidige konsekvenser for bevægelser af masser relativt til det lille legemes koordinatsystem. Det store legeme påvirker masserne med en tyngdetiltrækning. Og det store legeme accelererer det lille, således at der i dets koordinatsystem herudover virker et systemkraftfelt. Tidevandsfeltet fra det store legeme i det lille legemes koordinatsystem er summen af dette systemkraftfelt og tyngdekraftfeltet fra det store legeme. I det lille legemes massemidtpunkt ophæver de to kraftfelter hinanden. Men da tyngdekraftfeltet varierer med stedet, hvorimod systemkraftfeltet er det samme overalt, gælder det kun i netop massemidtpunktet. På figuren er indtegnet en x-koordinatakse, som går igennem de to massemidtpunkter, og som har nulpunkt i det lille legemes massemidtpunkt. Langs denne x-akse er størrelsen af tidevandsfeltet $F_t(x)$, regnet positivt bort fra M:

$$F_t(x) = \frac{GM}{R^2} - \frac{GM}{(R+x)^2} = \frac{GM}{R^2}\left[1 - \frac{1}{(1+\frac{x}{R})^2}\right]. \tag{2}$$

Her er x afstanden fra det lille legemes massemidtpunkt, regnet positiv bort fra M. Ved rækkeudvikling efter den lille størrelse $\frac{x}{R}$ fås:

$$F_t(x) \approx \frac{GM}{R^2}\left[1 - \left(1 - \frac{2x}{R}\right)\right] = \frac{GM}{R^2}\frac{2x}{R}. \tag{3}$$

Denne formel rummer svarene på begge opgaver. (En mere detaljeret udledning af formlen findes i artiklen om springflod i KVANT, juli 2008, breddeopgave 31).

I den første opgave er pointen, at tidevandsfeltet er faktoren $2x/R$ mindre end gravitationsfeltet i nærheden af det lille legeme, GM/R^2. Med galaksen som det store legeme og Solen, i afstanden $2.6 \cdot 10^{20}$ m fra galaksecentret, som det lille legeme, ses tidevandsfeltet i solkoordinatsystemet i Jordens afstand fra Solen, $1,5 \cdot 10^{11}$ m, således at være af størrelsesordenen $2(1,5 \cdot 10^{11})/(2,6 \cdot 10^{20}) \approx 10^{-9}$ gange mindre end både gravitationsfeltet og udslyngningen fra galaksen taget hver for sig. Faktoren 10^{-9} forklarer, hvorfor et koordinatsystem med centrum i Solen i praksis kan regnes for et inertialsystem.

I den anden opgave er pointen, at tidevandsfeltet omkring det lille legeme ifølge formlen, idet x på figuren er negativ på siden vendt imod det store legeme og positiv på siden vendt bort fra det store legeme, peger bort fra centrum af det lille legeme på begge sider. Solen forårsager derfor på Jorden både en tidevandspukkel vendt imod Solen og en tidevandspukkel vendt bort fra Solen, som Jorden dagligt drejer sig i.

Hvad angår tidevandsfeltet fra Månen gør det ingen forskel, at det fælles tyngdepunkt ligger så forskelligt i de to situationer. Med M for Månens masse og R for afstanden imellem Jorden og Månen er accelerationen af Jorden i dens bevægelse omkring Jordens og Månens fælles massemidtpunkt igen givet ved ligning (1), og tidevandsfeltet på forbindelseslinjen følgelig igen givet ved ligning (3) med to tidevandspukler.

Tidevandsfelterne fra Solen og Månen ses at forstærke hinanden, når Solen, Månen og Jorden ligger på linje. Springflod finder derfor sted så vel ved fuldmåne, som ved nymåne. Men ikke ved halvmåne.

Kommentar

Indsættes talværdier i Newtons gravitationslov findes gravitationsfeltet fra Jorden ved Månen at være $2,7 \cdot 10^{-3}$ m/s^2. Tilsvarende findes Solens gravitationsfelt ved Månen ud fra gravitationsloven at være $5,9 \cdot 10^{-3}$ m/s^2. Solens træk i Månen er altså mere end dobbelt så stort som Jordens træk i Månen.

Som indledning til undervisning i accelererede koordinatsystemer har jeg ofte taget udgangspunkt heri. Hvordan kunne det, dette faktum taget i betragtning, lade sig gøre for Newton at demonstrere sammenhængen imellem æblets fald fra træet og Månens omløbstid om Jorden ved at regne Månen og Jorden som et isoleret system uden Solens tilstedeværelse? Forklaringen ligger i faktoren $2x/R$ i ligning (3). Med afstanden mellem Jorden og Månen indsat for x og afstanden mellem Jorden og Solen indsat for R er faktoren 0,005. Effekten af Solens tilstedeværelse på Newtons regnestykke, Solens tidevandsfelt på Månen i jordkoordinatsystemet, er derfor af størrelsesordenen 1% af Jordens træk, og ikke det dobbelte af Jordens træk.

Besvarelsen ovenfor af breddeopgave 71 er inspireret af denne forklaring. Solen kan tages som nulpunkt for et inertialsystem, hvor der ses bort fra galaksens påvirkning af genstande i solsystemet, på samme måde som Jorden kan tages som nulpunkt for et inertialsystem , hvori der ses bort fra Solens påvirkning af genstandes bevægelser omkring Jorden. Generelt er det måske sådan, at det er faktoren 2x/R, der forklarer den hyppige forekomst af koordinatsystemer, som i praksis fungerer som inertialsystemer? I et system af kinesiske æsker kan der ved beregninger i indre æsker ofte med god tilnærmelse ses bort fra indvirkningen af gravitationsfelterne fra de ydre æsker, fordi disse kun medfører radikalt mindre tidevandsfelter end gravitationsfelterne selv.

Det mere direkte svar på opgave 71 er imidlertid, at gravitationsfeltet fra galaksen i solsystemet er ca. $5 \cdot 10^{-10}$ m/s^2, bedømt ud fra en solomløbstid i galaksen på $250 \cdot 10^6$ år og en solafstand til galaksens centrum på 26000 lysår. Og dette er i sig selv et meget svagt felt sammenlignet med f.eks. Solens gravitationsfelt på Jorden og Månen på $5,9 \cdot 10^{-3}$ m/s^2. Ved udregningen af formel (3) er antaget en sfærisk symmetrisk massefordeling i galaksen. Om det mørke stof bidrager tilstrækkeligt til at gøre antagelsen berettiget, ved jeg ikke. Men selvom forholdet imellem styrken af tidevandsfeltet fra galaksen og gravitationsfeltet fra galaksen ikke er 10^{-9}, som antagelsen fører til, er der under alle omstændigheder tale om, at tidevandsfeltet er ret så mange størrelsesordener mindre end gravitationsfeltet. Alligevel er gravitationsfeltet i sig selv så svagt, at hele snakken om tidevandsfelter er overflødig, som svar på opgave 71.

I øvrigt burde opgaveformuleringens "faste akser i forhold til stjernerne i vores galakse" under alle omstændigheder have været ændret til "faste akser i forhold til fjerne objekter uden for vores galakse", svarende til figur 1. Ellers skal der udover systemkraftfeltet som følge af accelerationen af koordinatsystemets nulpunkt også, unødvendigt komplicerende, tages højde for systemkraftfelter som følge af koordinatsystemets aksedrejning. Jeg ville ikke have stillet opgaven i dag.

Min tanke om gravitationen opbygget i et kinesisk æskesystem har også ledt mig på vildveje i forlængelse af besvarelsen af opgave 72. Det er jo nemlig ikke Jorden, der isoleret bliver slynget rundt af Solen, men det samlede system af jord plus måne. Det relevante tidevandsfelt til bedømmelse af fejlen, der begås, når Månens omløbstid udregnes i det isolerede jord/måne system, er derfor det felt, der findes i koordinatsystemet med Jordens og Månens fælles massemidtpunkt som nulpunkt, fremfor feltet i koordinatsystemet med Jordens centrum som nulpunkt. Og hvad menes der så – i forlængelse af denne tankegang – med at addere tidevandsfelterne på Jorden fra Månen og fra Solen, som det altid gøres, og som det blev gjort i løsningen her af opgave 72

Godt hjulpet (af Peter Ditlevsen) er mit svar nu på dette spørgsmål:

Lad os tænke på en klode påvirket af gravitationskraftfelter fra n andre objekter $\boldsymbol{a}_1(\boldsymbol{0}), \boldsymbol{a}_2(\boldsymbol{0}), ..., \boldsymbol{a}_n(\boldsymbol{0})$, hvor $\boldsymbol{0}$ refererer til klodens centrum, således at det er feltstyrkerne i centrum, der er tale om. Kloden vil da i et inertialsystem have accelerationen $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{a}_1(\boldsymbol{0}) + \boldsymbol{a}_2(\boldsymbol{0}) + ... + \boldsymbol{a}_n(\boldsymbol{0})$. I et koordinatsystem med nulpunkt i klodens centrum og faste akser i forhold til inertialsystemets akser vil genstande i positionen $\boldsymbol{r}$ derfor, udover gravitationskraftfelterne $\boldsymbol{a}_1(\boldsymbol{r}), \boldsymbol{a}_2(\boldsymbol{r}), ..., \boldsymbol{a}_n(\boldsymbol{r})$, være påvirket af systemkraftfeltet $-\boldsymbol{a}(\boldsymbol{0})$. Det resulterende kraftfelt i klodens system er derfor

$$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{a}_1(\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{a}_2(\boldsymbol{r}) + ... + \boldsymbol{a}_n(\boldsymbol{r}) - \boldsymbol{a}(\boldsymbol{0}) \qquad (4)$$

$$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r}) = [\boldsymbol{a}_1(\boldsymbol{r}) - \boldsymbol{a}_1(\boldsymbol{0})] + ... + [\boldsymbol{a}_n(\boldsymbol{r}) - \boldsymbol{a}_n(\boldsymbol{0})], \qquad (5)$$

hvor de kantede parenteser repræsenterer tidevandsfelterne forårsaget af de n objekter. Ifølge formel (5) findes det resulterende felt tydeligvis ved direkte addition af bidragende tidevandsfelter fra involverede kilder.

Det er altså i orden at besvare springflodsproblemet ved at lægge tidevandsfeltet fra Solen og tidevandsfeltet fra Månen sammen. Men jeg savnede som sagt et argument for det før den enkle udledning af ligning (5). Jeg har ikke kunnet finde argumentet og udledningen i litteraturen. Tilsyneladende tages den almindelige addition af kræfter umiddelbart til indtægt for den direkte addition af tidevandsfelter. Måske er det selvfølgeligt, selvom tidevandsfeltet forårsaget af en enkelt kilde på en måde er virtuelt, når der findes flere tidevandsfelt-forårsagende kilder. Tidevandsfeltet fra den enkelte kilde er virtuelt i den forstand, at det refererer til en ikke eksisterende acceleration, som ville være der, hvis alene kilden var til stede. Måske er det hele noget fortænkt; men tidevandsfeltet fra Solen i koordinatsystemet med nulpunkt i jord/måne massemidtpunktet, til bedømmelse af fejlen i Newtons isolering af jord/måne systemet ved beregningen af Månens omløbstid, er et andet end tidevandsfeltet fra Solen i koordinatsystemet med nulpunkt i Jordens centrum, til bedømmelse af spørgsmålet om springflod.

Breddeopgavegenren udfordrer ikke kun de studerende. Den udfordrer også opgavestillerne.

Breddeopgave 73. Rutsjende dug.

Inden næste nummer af KVANT udkommer, kan læserne eventuelt overveje løsningen til denne opgave (nr. 73 i rækken her i KVANT):

Hvornår rutsjer en dug, et tov eller lignende ned af bordet, som dugen m.m. ligger på tværs af med ulige lange nedhæng til to modstående sider? Begrund svaret.

Løsning og kommentar bringes i næste nummer af KVANT.