Tøndefald – breddeopgave 69 med didaktisk kommentar

Af Jens Højgaard Jensen, IMFUFA, INM, RUC.

Mit formål med artikelserien om breddeopgaver er – udover at gøre opmærksom på RUCs fysikuddannelse – dobbelt: Dels udvælger jeg opgaverne, så de kan have interesse som fysikproblemer i egen ret. Dels udvælger jeg dem med henblik på at kunne knytte didaktiske overvejelser til dem af interesse for fysikundervisere. I første omgang i forhold til universitetsundervisning. Men i anden omgang kunne der måske også trækkes paralleller til andre undervisningsniveauer.

Her bringes løsning og kommentar til opgaven fra forrige nummer samt en ny opgave. Opgaven i sidste nummer af KVANT var denne breddeopgave (nr. 69 i rækken her i KVANT):

Breddeopgave 69. Tøndefald

På ladet af en bil, der holder stille, er en cylinderformet tønde blevet glemt. Den ligger op ad forhuset med aksen vinkelret på køreretningen. Lastbilen speeder op for at køre. Hvor langt når den at køre før tønden ruller ud over den åbne bagende af ladet? Begrund svaret.

Løsning

Vi vil først antage, at tønden kan betragtes som et stift legeme med omdrejningssymmetrisk massefordeling. Hvis der f.eks. i tønden er væske, der kan skvulpe, er opgaven svær at besvare. Vi vil dernæst finde ud af, hvor lang tid det tager for tønden at rulle fra forhuset til bagenden af ladet ved at regne i lastbilens koordinatsystem.

Hvis lastbilen antages at have accelerationen a, og tønden massen m, er tønden i lastbilens system påvirket af kraften ma, rettet bagud og angribende i tøndens tyngdepunkt. Herudover er tønden påvirket af en modsat rettet gnidningskraft, G, angribende i tøndens berøring med ladet. Hvis vi betegner tøndens afstand fra forhuset x, er tøndens bevægelse relativt til ladet da givet ved:

$$m\ddot{x} = ma - G \tag{1}$$

Så længe tønden ruller, er G bestemt af momentsætningen omkring tøndens midterakse kombineret med rulningsbetingelsen. Kaldes tøndens radius r, dens inertimoment kmr^2 og dens vinkelhastighed i rotationen omkring midteraksen ω, udtrykker $rG = kmr^2\dot{\omega}$ momentsætningen og $r\omega = \dot{x}$ rulningsbetingelsen. Kombineret fås:

$$G = km\ddot{x} \tag{2}$$

Indsat i ligning (1) fås herefter

$$\ddot{x} = \frac{a}{1+k} \tag{3}$$

for accelerationen af tønden relativt til lastbilen.

Hvis vi for nemheds skyld antager a for konstant og kalder ladets længde for L, er tiden τ, det tager tønden at rulle fra forhuset til bagenden af ladet, ifølge faldloven for det frie fald, derfor givet ved:

$$L = \frac{a\tau^2}{2(1+k)}. \tag{4}$$

I tiden τ er distancen D, lastbilen har bevæget sig i forhold til vejen tilsvarende givet ved:

$$D = \frac{1}{2}a\tau^2. \tag{5}$$

Sammenholdes ligningerne (4) og (5), fås:

$$D = (1+k)L \tag{6}$$

som svar på opgaven. Svaret ses, udover af ladets længde (L), alene at afhænge af tøndens inertimoment (k), men altså ikke af lastbilens acceleration (a).

Kommentar

Hvad adskiller et velvalgt breddeeksamensproblem, der ved eksamen skal kunne løses på en time uden hjælpemidler, fra et velegnet projektkim, der skal kunne fungere som afsæt for et fysikorienteret 15 ECTS projektarbejde på 2. semester på den naturvidenskabelige bacheloruddannelse på RUC? Ikke meget, nødvendigvis. Opgaven her har været brugt som eksamensopgave i den svære ende af fysikstudiet, men kan også efter min vurdering bruges som afsæt til et 2. semesters projektarbejde. Men mine overvejelser over de to slags brug af opgaven er meget forskellige.

Som eksamensopgave hører opgaven, som skyldes Poul Winther Andersen, samtidigt med, at den er eksemplarisk for breddeopgavegenren, til i den svære ende. Løsningen af den forudsætter kombination af viden om og erfaring med accelererede koordinatsystemer, stive legemers mekanik, rulning og frit fald, på uvant måde. Vanskeligheden af opgaven taget i betragtning, er ovenstående besvarelse fuldt ud tilfredsstillende som resultatet af en times overvejelser ved eksamen.

Antagelsen, at a er konstant, er imidlertid overflødig. Resultatet i ligning (6) er gyldigt, uanset hvordan $a(t)$ varierer med tiden, forudsat tønden ikke skrider under forløbet. To gange integration af ligning (3) giver:

$$L = \int_{t_2=0}^{t_2=\tau} \left[\int_{t_1=0}^{t_1=t_2} \frac{a(t_1)}{1+k} dt_1 \right] dt_2 \tag{7}$$

Tilsvarende har vi:

$$D = \int_{t_2=0}^{t_2=\tau} \left[\int_{t_1=0}^{t_1=t_2} a(t_1) dt_1 \right] dt_2 \tag{8}$$

som sammenholdt med ligning (7) igen giver resultatet i ligning (6).

Men, som sagt, løsningen af opgaven ved antagelse af konstant a var OK. Det afgørende, breddeopgaverne skal træne, er evnen til formaliserende fysisk problemløsning. At kunne løse bredere og mere uskarpt formulerede problemer ved at identificere et forenklet og formelt formuleret matematisk/fysisk kerneproblem, hvis løsning fanger en essens for svaret på det løsere formulerede problem. I den sammenhæng kan udvidelsen fra konstant a til tidsligt varierende $a(t)$ betragtes som mere teknisk end essentiel.

For tøndefaldsproblemet som projektkim for et 15 ECTS projektarbejde på den naturvidenskabelige bacheloruddannelse på RUC forholder det sig helt anderledes. Problemet inviterer til eksperimentelle undersøgelser. For at sammenholde teori og eksperiment må k så måles eller beregnes for forskellige foreliggende tønder. Og følsomheden af resultatet i ligning (6) af antagelsen om konstant a vurderes. Hvilket da leder til udvidelsen af rækkevidden af ligning (6) via ligningerne (7) og (8).

Et ideelt RUC projekt drejer sig ikke om at gå på jagt efter gemte essenser, som breddeopgaverne gør. Her drejer det sig netop om selvstændigt løbende at udvide og justere udgangsproblemet i takt med løbende problemafklaringer. Udover rækken af opdukkende problemer i sammenhæng med udførelsen af det eksperimentelle arbejde, kunne det også tænkes, at spørgsmålet om skridning dukkede op som teoretisk problem.

Så længe a ikke er for stor har vi ren rulning med G givet ved indsættelse af ligning (3) i ligning (2):

$$G = \frac{kma}{1+k}. \tag{9}$$

Skridning indtræffer, når G ifølge ligning (9) overskrider $\mu_s mg$, hvor μ_s er den statiske gnidningskoefficient og g tyngdefeltstyrken. Tønden skrider derfor i stedet for at rulle, når a overstiger a_{kr} givet ved:

$$a_{kr} = \frac{k+1}{k}\mu_s g \tag{10}$$

For en tom tønde med radius r og højde h og samme vægtykkelse overalt er k givet ved:

$$k = \frac{r+2h}{2r+2h}. \tag{11}$$

Som et lidt realistisk eksempel kan vi vælge $h = 4r$. Da er k ifølge formlen 0,9. For stål imod stål er μ_s lig med 0,7. Indsættes det sammen med $k = 0{,}9$ i ligning (10) fås $a_{kr} = 1{,}5g$. Det er en ret voldsom acceleration, som vistnok sjældent forekommer for lastbiler, bortset fra i ulykkestilfælde.

Men i et projektarbejde kunne denne grænse måske udfordres. I så tilfælde udvikler der sig en kaskade af bevægelsesforløb at undersøge og regne på. Bevægelsen på ladet er givet ved ligning (1), hvor G er givet ved ligning (9) i perioder, hvor a er mindre end a_{kr}. I perioder, hvor a er større end a_{kr}, er G i ligning (1) derimod givet ved $\mu_d mg$, hvor μ_d er den dynamiske gnidningskoefficient (for stål imod stål 0,6).

Projektarbejdet kunne også udvides i retning af tønder med asymmetrisk massefordeling. Eller tønder med skvulpende væske i.

Det er en pointe ved projektarbejdet på RUC, at det er de studerende selv, der foretager dets løbende problemudvikling. Så jeg stopper med antydninger af retninger af mulige forløb her, idet jeg håber at have illustreret den didaktisk forskellige situation mellem at arbejde med en breddeopgave som træning i fysisk problemløsning og at benytte den som afsæt for et projektarbejde med dets større spektrum af læringsmål.

Breddeopgave 70. Acceleration i inhomogent tyngdefelt

Inden næste nummer af KVANT udkommer, kan læserne eventuelt overveje løsningen til denne opgave fra breddekurset på RUC (fra eksamen juni 2014, nr. 70 i rækken her i KVANT):

En frit svævende stang med retning mod Jordens centrum er så lang, at tyngdefeltet er af forskellig størrelse i de to ender af stangen. Hvor stor er stangens acceleration imod Jorden? Begrund svaret.

Løsning og kommentar bringes i næste nummer af KVANT.