Centrifuge og tehvirvel – breddeopgave 58 og 59 med didaktisk kommentar

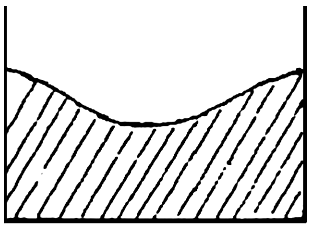
Af Jens Højgaard Jensen, IMFUFA, NSM, RUC.

Mit formål med artikelserien om breddeopgaver er – udover at gøre opmærksom på RUCs fysikuddannelse – dobbelt: Dels udvælger jeg opgaverne, så de kan have interesse som fysikproblemer i egen ret. Dels udvælger jeg dem med henblik på at kunne knytte didaktiske overvejelser til dem af interesse for fysikundervisere. I første omgang i forhold til universitetsundervisning. Men i anden omgang kunne der måske også trækkes paralleller til andre undervisningsniveauer.

Her bringes løsninger og kommentar til opgaverne fra forrige nummer samt en ny opgave. Opgaverne i sidste nummer af KVANT var disse breddeopgaver (nr. 58 og 59 i rækken her i KVANT):

Breddeopgave 58 og 59. Centrifuge og tehvirvel

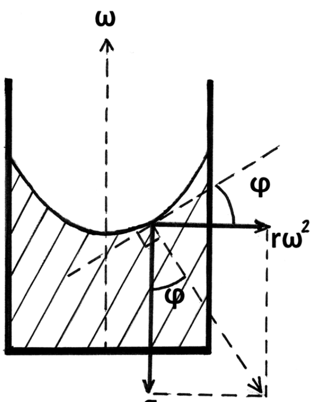
Hvilken form har overfladen af en væske i en centrifuge? Begrund svaret.
Når der røres rundt i en kop te eller et glas vand, stiller overfladen sig typisk som antydet på figuren:



Hvad viser det om væskebevægelserne? Begrund svaret.

Løsning

58. Vi anskuer problemet fra et koordinatsystem, der følger med centrifugen i dens rotation. I forhold hertil står væsken stille med en overflade vinkelret på det resulterende kraftfelt i det roterende system. Idet centrifugen antages at rotere om en lodret akse, er det resulterende kraftfelt sammensat af det homogene tyngdefelt g, rettet nedad, og centrifugalfeltet $r\omega^2$, rettet udad, som det er vist på figur 1 (ω er vinkelhastigheden af centrifugen, r afstanden fra centrifugeaksen).



Figur 1. Centrifuge analyseret i det medroterende system.

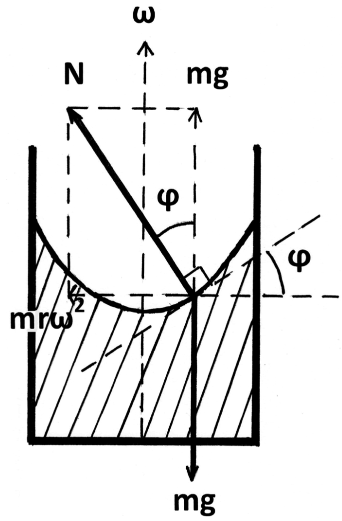
Af figur 1 fremgår det, at tangens til vinklen φ både er lig med $r\omega^2/g$ og hældningskoefficienten af væskeoverfladen i afstanden r fra aksen. Kaldes højden af væskeoverfladen som funktion af r for $h(r)$ har vi derfor:

$$\frac{dh(r)}{dr} = \frac{r\omega^2}{g}, \tag{1}$$

som ved integration giver:

$$h(r) = h(0) + \frac{r^2\omega^2}{2g}. \tag{2}$$

Tværsnittet af væskeoverfladen er altså en parabel. Overfladen af en væske i en centrifuge har således form som en omdrejningsparaboloide.



Figur 2. Centrifuge analyseret i inertialsystemet.

59. Opgave 58 kunne også være løst i inertialsystemet. En massedel m af væskeoverfladen bevæger sig anskuet herfra i en jævn cirkelbevægelse rundt om centrifugeaksen med vinkelhastigheden ω. På massedelen virker tyngdekraften mg, rettet nedad, og normalreaktionen N fra de omgivende væskedele. N er vinkelret på væskeoverfladen. I modsat fald har overfladen ikke stabiliseret sig endnu, hvilket vi antager den har. Ifølge Newtons II lov skal vektorsummen af tyngdekraften og normalreaktionen være lig med massen m gange accelerationen $r\omega^2$, rettet imod aksen, i den jævne cirkelbevægelse for massedelen m i afstanden r fra aksen. Som vist på figur 2 betyder det, at den lodrette komposant af N har størrelsen mg, medens den vandrette komposant af N har størrelsen $mr\omega^2$. Herefter kan ligning (1) igen aflæses af figuren og opgave 58 løses som gjort ved brug af figur 1.

Opgave 59 lader sig også besvare ved hjælp af figur 2. Af figuren kan vi aflæse sammenhængen imellem hældningen af overfladen og vinkelfrekvensen for rotationen i afstanden r til at være givet ved:

$$\tan\varphi = r\omega^2/g. \tag{3}$$

Tegningen af overfladen i tekoppen viser et udseende i retning af centrifugens paraboloide i midten af koppen. Ved kanten af koppen er overfladen derimod vandret. Opgavefiguren tyder således ifølge ligning (3) på, at teen roterer med den frekvens den blev omrørt med i midten af koppen, medens den er i hvile ved koppens overflade på grund af gnidningen imod overfladen.

Kommentar

Hvis der er blade i teen, når der røres rundt i den, vil de ende med at samle sig på bunden midt i koppen. Man kan spørge, hvorfor de ikke centrifugeres udad til kanten af koppen i betragtning af deres større massefylde end teens? Forklaringen er først givet af A. Einstein i 1926. Det er igen gnidningen der er i spil. Men nu imod koppens bund. På grund af gnidningen deltager væskelaget umiddelbart over bunden ikke i rotationen. Derfor vil det på grund af den imod centrum aftagende tyngde af den overliggende væske blive drevet imod centrum. Der opstår en lodret hvirvel, som i en skypumpe, med opstigende væske i centrum og nedadstrømmende væske længere ude i koppen. Og det er denne hvirvel, der samler tebladene i midten. (Ref.: H.H. Jensen, Deformerbare Stoffers Dynamik, Gjellerup 1968, side 74. Sagen har også været genstand for diskussion i *Gamma* nr. 90, 97, 101 og 104 (1992-1996).).

Jeg har modstillet centrifugeopgaven og tehvirvelopgaven som illustration af vigtigheden af at kunne vælge beskrivelsessystem efter, hvad der i sammenhængen er hensigtsmæssigt. Centrifugen lader sig nemmest forstå i det medroterende system, selvom det, som gjort, også kan lade sig gøre i inertialsystemet. Omvendt er tehvirvlens overfladeform nemmere at forklare i inertialsystemet, som gjort, selvom tolkningen også kan gives ved henvisning til varierende medroterende systemer lokalt ud igennem koppen. Endelig er Einsteins forklaring på samlingen af tebladene bundet til koppens system.

De to opgaver giver mig også anledning til at kommentere ordvalgene "fiktive kræfter", "centripetalkraft" og "tyngdeacceleration" i lærebogslitteraturen i fysik.

Ved den skriftlige eksamen ved breddekurset i sommeren 2007 var en af opgaverne:

Fysikeren Jens Martin Knudsen lod engang så karse på en stor roterende skive for overfor de studerende at demonstrere, at de såkaldte fiktive kræfter ikke er så fiktive endda. Hvordan groede karsen i de 14 dage skiven roterede? Begrund svaret.

Demonstrationsforsøget viste, at karsen gror imod det resulterende kraftfelt i det medroterende system. For karsen er centrifugalkraften som følge af rotationen af underlaget, den gror på, og tyngdekraften fra Jorden lige reelle og lige lidt fiktive. På samme måde som det er tilfældet for væskedelene i centrifugen. Ordet "fiktiv" om centrifugalkraften er derfor uheldig valgt. I min undervisning i elementær mekanik bruger jeg ordene *naturkræfter* om kræfter, hvor der henvises til et naturfænomen som kilde, og *systemkræfter*, når kilden til kræfterne er accelerationen af koordinatsystemet, hvori bevægelsen beskrives.

Ifølge min erfaring er det vigtigt i introducerende mekanikundervisning at fastholde den begrebslige forskellighed imellem de to sider af Newtons II lov. På den ene side af ligningen står det, der kan måles ved f.eks. at indskyde fjedre, kræfterne. På den anden side står en beskrivelse af bevægelse, der kan måles ved hjælp af ure og meterstokke. Bevægelsen er naturligvis bevægelse i forhold til noget med deraf afledte konsekvenser for, hvilke kræfter der skal medtænkes. Men uanset, hvad bevægelsen beskrives i forhold til, giver det mindst forvirring at tænke på Newtons II lov, ikke som en matematisk identitet, men som en erfaringslov.

Centrifugalkraften hører til på kraftsiden af Newtons II lov. Anderledes forholder det sig med *centripetalkraften*. Formelt set er det den resulterende kraft, uanset hvad den skyldes, der forårsager en jævn cirkelbevægelse. Så langt så godt. Men når centripetalkraften herefter identificeres med $mr\omega^2$, giver det efter min erfaring anledning til begrebsforvirring hos de studerende tenderende til, at der på figur 2 skal indtegnes tre kræfter på væskedelene (Som der, i modsætning hertil, godt kunne være gjort på figur 1). Størrelsen $mr\omega^2$ på figur 2 er ikke en kraft. Den er en matematisk følge af beskrivelsen af bevægelsen som en jævn cirkelbevægelse. Ifølge erfaringsloven er størrelsen lig med den resulterende kraft. Hvis den derimod identificeres med den resulterende kraft er Newtons II lov gjort til en definitionsligning og ikke en erfaringslov. Uanset den eventuelle justering af statussen af Newtons II lov senere i deres fysikstudier er det efter min erfaring et dårligt udgangspunkt for studerende til at lære Newtons mekanik. I min undervisning forsøger jeg helt at undgå at bruge udtrykket centripetalkraft.

Tilsvarende er "tyngdeaccelerationen" et uheldigt ordvalg for tyngdefeltstyrken. Ved brug af Newtons II lov kan det udregnes, at accelerationen ved et frit fald i tyngdefeltet er lig med tyngdefeltstyrken. Det er imidlertid forstyrrende for forståelsen af Newtons II lov, at ordet tyngdeacceleration bruges som betegnelse for tyngdefeltstyrke.

Breddeopgave 60. Fisk

Inden næste nummer af KVANT udkommer, kan læserne eventuelt overveje løsningen til denne opgave fra breddekurset på RUC (fra sommereksamen 2009, nr. 60 i rækken her i KVANT):

Som tommelfinger regel svømmer store fisk hurtigere end ligedannede små fisk. Forklar hvorfor.

Løsning og kommentar bringes i næste nummer.