Stigefald – breddeopgave 55 med didaktisk kommentar

Af Jens Højgaard Jensen, IMFUFA, NSM, RUC

Mit formål med artikelserien om breddeopgaver er – udover at gøre opmærksom på RUCs fysikuddannelse – dobbelt: Dels udvælger jeg opgaverne, så de kan have interesse som fysikproblemer i egen ret. Dels udvælger jeg dem med henblik på at kunne knytte didaktiske overvejelser til dem af interesse for fysikundervisere. I første omgang i forhold til universitetsundervisning. Men i anden omgang kunne der måske også trækkes paralleller til andre undervisningsniveauer.

Her bringes løsning og kommentar til opgaven fra forrige nummer samt en ny opgave. Opgaven i sidste nummer af KVANT var denne breddeopgave (nr. 55 i rækken her i KVANT):

Breddeopgave 55. Stigefald

En person befinder sig i toppen af en næsten lodret stående stige. Stigen begynder at vælte. Slår personen sig mindst i faldet ved at holde fast i stigen under faldet, eller ved at give slip på stigen? Begrund svaret.

Løsning

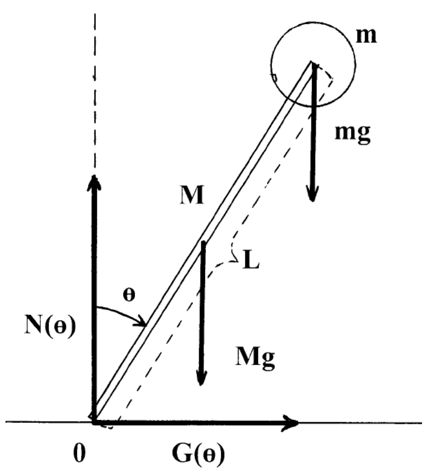
Farten $v_{\text{spids,slut}}$, hvormed personen rammer jorden, når hun/han holder fast i stigen under faldet, kan udregnes ud fra energibevarelsen under faldet. Hvis I_0 betegner inertimomentet omkring stigens fodpunkt, ω_{slut} vinkelfrekvensen af stigen, når den rammer jorden, m massen af personen, M massen af stigen, g tyngdefeltstyrken, og L længden af stigen, har vi:

$$\frac{1}{2}I_0\omega_{\text{slut}}^2 = mgL + \frac{1}{2}MgL, \tag{1}$$

eller

$$\frac{1}{2}(m+\frac{1}{3}M)v_{\text{spids,slut}}^2 = (m+\frac{1}{2}M)gL, \tag{2}$$

idet $I_0 = mL^2 + \frac{1}{3}ML^2$ og $\omega_{\text{slut}}L = v_{\text{spids,slut}}$.



Af ligning (2) fås:

$$v_{\text{spids,slut}} = \sqrt{\frac{(m+\frac{1}{2}M)}{(m+\frac{1}{3}M)}}\sqrt{2gL}. \tag{3}$$

Den anden faktor i dette udtryk for $v_{\text{spids,slut}}$ er personens hastighed ved et frit fald, når jorden rammes. Da den første faktor er større end 1 ses det, at personen slår sig mere ved at holde fast i stigen under faldet end ved at give slip på stigen og falde frit.

Kommentar

Den anførte løsning var, hvad vi havde i tankerne, da vi stillede opgaven til vintereksamen 2011. Desværre er løsningen forkert. Den ville være rigtig, hvis stigen var fæstnet til et hængsel i fodpunktet. Men normalt står stiger jo frit på jorden. Og så flytter fodpunktet sig typisk langs jorden ved slutningen af faldet. Det ses f.eks. ved faldet af en lineal stillet på højkant. På mit glatte skrivebord flytter fodpunktet sig imod faldretningen, når jeg stiller linealen på bordet før jeg lader den falde. Hvis jeg stiller den på et mindre glat stykke papir ender den derimod med at flytte fodpunktet i faldretningen. I ingen af tilfældene er fodpunktet et fast punkt under hele faldet. Til at begynde med roterer linealen om sit fodpunkt. Men mod slutningen af faldet skrider fodpunktet. Tilsvarende sker med den faldende stige.

Det kan forstås ved at udregne størrelserne af normalreaktionen $N(\Theta)$ og gnidningskraften $G(\Theta)$ under faldet så længe stigen roterer om sit fodpunkt, mens dens vinkel med lodlinien, Θ, forøges fra 0 til højst 90°. Den samlede masse gange accelerationen af det fælles tyngdepunkt for person og stige er lig med summen af kræfterne på systemet bestående af person og stige. Så længe stigen ikke skrider fås derfor:

$$\begin{aligned} G(\theta) &= (m+M)\frac{d}{dt}[L_{\text{CM}}\dot{\Theta}\cos(\Theta)] \\ &= (m+M)L_{\text{CM}}[\ddot{\Theta}\cos(\Theta) - \dot{\Theta}^2\sin(\Theta)], \end{aligned} \tag{4}$$

og

$$\begin{aligned} (m+M)g - N(\theta) &= (m+M)\frac{d}{dt}[L_{\text{CM}}\dot{\Theta}\sin(\Theta)] \\ &= (m+M)L_{\text{CM}}[\ddot{\Theta}\sin(\Theta) + \dot{\Theta}^2\cos(\Theta)], \end{aligned} \tag{5}$$

hvor g er tyngdefeltstyrken og L_{CM} er afstanden fra fodpunktet til det fælles tyngdepunkt for stige og person: $L_{\text{CM}} = L(m + \frac{1}{2}M)/(m + M)$. $\dot{\Theta}$ ($\ddot{\Theta}$) er den første (anden) tidsafledede af vinklen Θ, dvs. den øjeblikkelige vinkelhastighed (vinkelacceleration).

Energibevarelsen under rotationen om fodpunktet kan så bruges til at udregne $\dot{\Theta}^2$ og $\ddot{\Theta}$. Af

$$\frac{1}{2}I_0\dot{\Theta}^2 = (m + M)gL_{\text{CM}}[1 - \cos(\Theta)] \qquad (6)$$

fås, idet $I_0 = (m + \frac{1}{3}M)L^2$:

$$\dot{\Theta}^2 = \frac{2g}{L}\frac{(m + \frac{1}{2}M)}{(m + \frac{1}{3}M)}[1 - \cos(\Theta)]. \qquad (7)$$

Differentiation heraf giver:

$$\ddot{\Theta} = \frac{g}{L}\frac{(m + \frac{1}{2}M)}{(m + \frac{1}{3}M)}\sin(\Theta). \qquad (8)$$

Ved at indsætte disse udtryk for $\dot{\Theta}^2$ og $\ddot{\Theta}$ i ligningerne (4) og (5) fås:

$$G(\Theta) = g\frac{(m + \frac{1}{2}M)^2}{m + \frac{1}{3}M}\sin(\Theta)(3\cos(\Theta) - 2) \qquad (9)$$

og $N(\Theta) =$

$$g(m + M)\left[1 - \frac{(m + \frac{1}{2}M)^2}{(m + M)(m + \frac{1}{3}M)}f(\Theta)\right], \qquad (10)$$

hvor $f(\Theta) = 1 + 2\cos(\Theta) - 3\cos^2(\Theta)$.

Gnidningskraften $G(\Theta)$ vokser fra at være nul i lodret stilling til et maksimum, når $\cos(\Theta) = (1 + \sqrt{19})/6$ og $\Theta = 26{,}7°$. Det ses ved differentiation af ligning (9). Siden ses den at skifte fortegn, når $\cos(\Theta)$ er faldet til 2/3 og $\Theta = 48{,}2°$.

Normalreaktionen $N(\Theta)$ ses ved differentiation af ligning (10) at have minimum for $\cos(\Theta) = 1/3$ og $\Theta = 70{,}5°$. Hvis $m = 0$ er minimumsværdien nul. Hvis $M = 0$ er minimumsværdien $-\frac{1}{3}mg$ og $N(\Theta)$ nul for $\cos(\Theta) = \frac{2}{3}$ og $\Theta = 48{,}2°$. Imellem disse yderpunkter for forholdet mellem m og M er $N(\Theta)$ nul og skifter fortegn ved en vinkel imellem $48{,}2°$ og $70{,}5°$ svarende til, at $\cos(\Theta)$ ligger imellem 2/3 og 1/3.

Det hele er ret indviklet!

For linealen, dvs. tilfældet $m = 0$, har $G(\Theta)/N(\Theta)$ et maksimum på 0,371 for $\Theta = 35{,}1°$. Hvis $\mu_s < 0{,}371$ – linealen på mit skrivebord – vil $G(\Theta)/N(\Theta)$ derfor overstige μ_s inden denne vinkel nås og da begynde at skride baglæns. Hvis derimod $\mu_s > 0{,}371$ – linealen på papir – er kravet $G(\Theta) < \mu_s N(\Theta)$ opfyldt så længe $G(\Theta)$ er positiv, altså for $\Theta < 48{,}2°$. Men for $\Theta > 48{,}2°$ vil kravet til gnidningskoefficienten på et tidspunkt blive uopfyldeligt. Den numeriske værdi af den nu negative, altså modsatrettede, gnidningskraft vil nødvendigvis overstige $\mu_s N(\Theta)$ på vejen imod $N(\Theta) = 0$ for $\Theta = 70{,}5°$. Fra da af skrider linealen så forlæns.

For $m \neq 0$ flytter maksimum for $G(\Theta)/N(\Theta)$ sig til større værdier end 0,371 og større vinkler end $35{,}1°$, når værdien af m/M øges. For $m/M \to \infty$ går maksimumsvinklen imod $48{,}2°$ og $cos(\Theta) = 2/3$. Mønsteret er det samme for $m \neq 0$ som for $m = 0$, bortset fra, at den statiske gnidningskoefficient, der skal til for at opnå skridning fremad, er større. Hvor meget større afhænger af m/M. Da $G(\Theta)/N(\Theta) \to \tan(\Theta)$ for $m/M \to \infty$ så længe $\cos(\Theta) > 2/3$, vil stigen under alle omstændigheder skride fremad, hvis $\mu_s > \tan(48{,}2°) = 1{,}12$.

Beregninger af den fortsatte bevægelse af den faldende stige med person på, efter at den er begyndt at skride, kan gennemføres ved brug af momentsætningen omkring tyngdepunktet, ligning (5) og $|G| = \mu_d N$, hvor μ_d er den dynamiske gnidningskoefficient. Men bevægelsen og beregningerne er indviklede og afhængige af værdierne af μ_s, μ_d og m/M. Jeg har derfor for nuværende opgivet at besvare breddeopgave 55. I praksis ville jeg nok under alle omstændigheder vælge at slippe stigen for ikke at blive viklet ind i den ved faldet. Den interesserede læser, der vil regne videre, henvises til R. Cross, "The fall and bounce of pencils and other elongated objects", *Am. J. Phys.* **74** (1), January 2006.

Det er en didaktisk pointe, at der fra de studerendes side ikke blev klaget over eksamensopgaven, selvom den i praksis var uløselig for dem. Den didaktiske kontrakt mellem lærere og studerende ved kurserne i fysisk problemløsning er ikke, at de til eksamen skal bedømmes på andelen af rigtigt besvarede opgaver. Kontrakten er, at de skal bedømmes på deres demonstrerede grad af tænkning som fysikere. De studerendes besvarelser var i større eller mindre grad, som vi i farten havde forestillet os besvarelsen. Altså svarende til at stigen er hængslet i fodpunktet. En besvarelse som vores ovenstående gav maksimum point.

Senere har vi kunnet benytte opgaven i undervisningen som illustration af, at problemer kan være mere komplekse end umiddelbart antaget.

Breddeopgave 56 og 57. Raketligningen og Keplers anden lov

Inden næste nummer af KVANT udkommer, kan læserne eventuelt overveje løsningen til disse to opgaver fra breddekurset på RUC (fra vintereksamen 1977 og sommereksamen 2001, nr. 56 og 57 i rækken her i KVANT):

Forklar virkningen af en raketmotor i det lufttomme rum.

Ifølge Keplers anden lov overstryger forbindelseslinjen fra solen til en planet lige store arealer i lige store tidsrum. Forklar loven.

Løsninger og kommentar bringes i næste nummer.