Rekyl – breddeopgave 54 med didaktisk kommentar

Af Jens Højgaard Jensen, IMFUFA, NSM, RUC

Mit formål med artikelserien om breddeopgaver er – udover at gøre opmærksom på RUCs fysikuddannelse – dobbelt: Dels udvælger jeg opgaverne, så de kan have interesse som fysikproblemer i egen ret. Dels udvælger jeg dem med henblik på at kunne knytte didaktiske overvejelser til dem af interesse for fysikundervisere. I første omgang i forhold til universitetsundervisning. Men i anden omgang kunne der måske også trækkes paralleller til andre undervisningsniveauer.

Her bringes løsning og kommentar til opgaven fra forrige nummer samt en ny opgave. Opgaven i sidste nummer af KVANT var denne breddeopgave (nr. 54 i rækken her i KVANT):

Breddeopgave 54. Rekyl

Rekylvirkningen på de anslåede atomer i en lysende gas ved lysudsendelse medfører en svag afvigelse af frekvensen af det udsendte lys i forhold til den frekvens, der svarer til forskellen mellem atomernes hvileenergi før og efter lysudsendelse. Hvor stor en afvigelse er der tale om? Begrund svaret.

Løsning

Vi kalder forskellen mellem atomernes hvileenergi før og efter lysudsendelse for ΔE og deres hvilemasse i grundtilstanden M. For et atom i hvile før lysudsendelse vil atomets hastighed v efter lysudsendelse på grund af impulsbevarelsen under lysudsendelse være givet ved $Mv = h\nu/c$, hvis vi regner urelativistisk. Her er h Plancks konstant, ν frekvensen af det udsendte lys og c lyshastigheden. Da afvigelsen af ν fra $\nu_0 = \Delta E/h$ er svag gælder $Mv \approx \Delta E/c$. Størrelsen af den kinetiske energi af det rekylerende atom er derfor tilnærmelsesvis:

$$R = \frac{1}{2}Mv^2 \approx \frac{\Delta E^2}{2Mc^2}. \qquad (1)$$

For frekvensafvigelsen har vi tilsvarende:

$$\nu_0 - \nu = \frac{R}{h} \approx \frac{\Delta E^2}{2Mhc^2}. \qquad (2)$$

Kommentar

Min far, Henning Højgaard Jensen, holdt i perioden 1952-1960 første års forelæsningerne i fysik på Polyteknisk Læreanstalt (nuværende DTU). Da der var ca. 500 tilhørere per årgang, har omkring 4000 studerende hørt disse forelæsninger. Det store antal gør, at jeg har haft fornøjelsen af tilfældigt at træffe enkelte af dem ind imellem. Jeg får så typisk fortalt to anekdoter fra min fars forelæsninger. Den ene er en typisk professor anekdote: Det hændte, når min far stak sin tændte pibe i jakkelommen for at begynde forelæsningen, at der gik ild i lommen. Denne anekdote har ikke noget med breddeopgaven her at gøre. Men det har den anden: Min far skulle efter sigende have rådet til, at "tilnærmelser skal gøres på så sent et stadium som muligt". Og efter sigende have været uforstående overfor, at det skulle kunne opfattes morsomt af en forsamling unge studerende. Senere, når han blev mindet om sin tilnærmelses grundsætning, forstod han jo nok tvetydigheden i den. Ved løsningen af opgaven her er der gjort tilnærmelser på et tidligt stadium. Dels er der regnet urelativistisk, hvilket jo er en tilnærmelse, der kræver en begrundelse. Dels er impulsen af det udsendte lys som tilnærmelse sat til $\Delta E/c (= h\nu_0/c)$ i stedet for $h\nu/c$.

Lad os prøve at følge min fars anbefaling ved først at droppe impulstilnærmelsen, dernæst regne relativistisk. Og så gøre tilnærmelser slutteligt.

Urelativistisk uden tilnærmelser herudover har vi, at impulsbevarelsen $Mv = h\nu/c$ indsat i energibevarelsen $\Delta E = h\nu + \frac{1}{2}Mv^2$ giver:

$$\left(\frac{h\nu}{Mc^2}\right)^2 + \frac{2h\nu}{Mc^2} - \frac{2\Delta E}{Mc^2} = 0 \qquad (3)$$

til bestemmelse af ν og afvigelsen af ν fra ν_0. Med forkortelserne $y = h\nu/Mc^2$ og $x = \Delta E/Mc^2$ er løsningen til denne andengradsligning (idet kun denne rod giver fysisk mening):

$$y(x) = -1 + \sqrt{1 + 2x}. \qquad (4)$$

Til bedømmelse af afvigelsen imellem y og x, som opgaven nu går ud på at finde, rækkeudvikles ligningen:

$$y(x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3 - \frac{5}{8}x^4 + \frac{7}{8}x^5 - .... \qquad (5)$$

Relativistisk har vi $Mv\gamma(v) = h\nu/c$ og $Mc^2 + \Delta E = h\nu + Mc^2\gamma(v)$ til erstatning af de klassiske udgaver af bevarelsessætningerne. $\gamma(v)$ er som sædvanlig en forkortelse for $1/\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$. Efter nogen regning fås heraf med de samme betydninger af y og x som i det klassiske tilfælde:

$$y(x) = \frac{x^2 + 2x}{2x + 2} \qquad (6)$$

med rækkeudviklingen:

$$y(x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{2}x^5 - .... \quad (7)$$

At nøjes med at medtage det første led i rækkeudviklingerne (5) og (7) ses at svare til at se bort fra rekyl. At nøjes med at medtage de to første led i rækkeudviklingerne ses at svare til den tilnærmelsesvise bestemmelse af rekylen i ligning (1). Det ses også, at en forbedret rekylbestemmelse, svarende til at medtage det tredje led i rækkeudviklingerne, giver samme resultat relativistisk og urelativistisk. Først hvis vi medtager det fjerde led i rækkeudviklingerne er der forskel imellem at regne relativistisk og urelativistisk. Den tilnærmelse, der lå i at sætte impulsen af det udsendte lyskvant til at være $h\nu_0/c$, er altså større end den, der ligger i at regne urelativistisk frem for relativistisk.

Nu må stadiet, hvor vi kan overskue berettigelsen af varierende grad af tilnærmelser, være nået.

Da hvileenergien af en nukleon er ca. 1000 MeV, ligger Mc^2 for et atom med fra 1 til 100 gange massen af en nukleon i størrelsesordens intervallet 10^9 eV til 10^{11} eV. Den typiske energi for et lyskvant og værdien af ΔE er af størrelsesordenen 1 eV. Derfor er $x = \Delta E/Mc^2$ et tal i størrelsesordensintervallet $10^{-9} - 10^{-11}$. Rekylenergien R er altså størrelsesordensmæssigt 10^{-9} til 10^{-11} gange ΔE. Tilsvarende er den relative tilnærmelsesfejl i udtrykkene (1) og (2) af størrelsesordenen 10^{-9} til 10^{-11}. Medens forbedringerne af udtrykkene (1) og (2) ved at regne relativistisk frem for urelativistisk ses at ligge på et sted mellem 18ende og 22ende betydende ciffer.

Tilnærmelserne gjort i begyndelsen af opgavebesvarelsen oven for er altså i høj grad berettigede. Det vil de endda være ved emission af gammastråling i forbindelse med kerneovergange. Energien af den ofte benyttede anslåede tilstand af Fe-57 til Mössbauer-effekt studier er f.eks. 14,4 keV og x tilsvarende da et tal i størrelsesordensintervallet 10^{-5} til 10^{-7}. Altså stadig et meget lille tal.

Den trænede i fysisk problemløsning vil nok starte med at vurdere størrelsen af x og så i opgaven her med det samme foretage tilnærmelserne som gjort. Og ikke på et så sent stadium som muligt, som anbefalet af min far. Men for den utrænede tror jeg hans anbefaling er rigtig. Et resultat er ikke meget værd, hvis ikke usikkerheden på det kendes. Derfor er bevidste vurderinger af fejlene, der indføres ved idealiseringer og tilnærmelser vigtige. Og min fars anbefaling bidrager til, at vurderingsevnen af rimeligheden af tilnærmelser trænes.

På kurserne i fysisk problemløsning på RUC har jeg i sammenhæng med rekylopgaven også tematiseret rækkeudviklingerne ovenfor som eksempel på, hvordan den matematiske teknik "rækkeudvikling" tages i brug i fysik. I det hele taget er der behov for undertiden at adressere forskellige slags matematiske standardværktøjer. En ting er at være matematisk introduceret til udvikling af funktioner i en Taylorrække. En anden ting er at blive en rutineret anvender af rækkeudvikling.

Breddeopgave 55. Stigefald

Inden næste nummer af KVANT udkommer, kan læserne eventuelt overveje løsningen til denne opgave fra breddekurset på RUC (fra vintereksamen 2011, nr. 55 i rækken her i KVANT):

En person befinder sig i toppen af en næsten lodret stående stige. Stigen begynder at vælte. Slår personen sig mindst i faldet ved at holde fast i stigen under faldet, eller ved at give slip på stigen? Begrund svaret.

Løsning og kommentar bringes i næste nummer.