# Stabilitet i 3-legeme problemet

*Asmus Koefoed, Niels Bohr Institutet, Københavns Universitet*

"3-legeme problemet", har videnskaben døbt dét problem, der opstår, når man skal forstå dynamikken for tre gravitationelt eller elektrisk bundne objekter, der er i indbyrdes kredsløb om hinanden. Det giver typisk nogle meget kaotiske baner. Fx kan to af objekterne finde på at "rotte sig sammen" og smide det tredje objekt ud på langfart, mens de to tilbageblevne etablerer et stabilt 2-legeme system. Men så vender det tredje objekt tilbage og laver på ny ravage. Startbetingelser, der giver stabile systemer, er svære at finde, for der er 21 parametre, der alle kan variere fra nul til uendeligt, men det ser ud til, at en genetisk algoritme kan hjælpe med til at løse problemet.

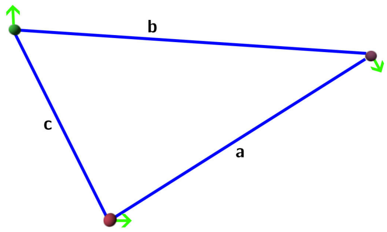
### 3-legeme problemet

3-legeme problemet har været studeret af blandt andet Euler, Clairaut, d'Alembert, Lagrange, Laplace og Poincaré siden Newton skrev "Inequalities Of The Lunar Motion" i 1740'erne, og går i bund og grund ud på at beskrive banerne for tre punktmasser $m_1$, $m_2$ og $m_3$, som tiltrækker hinanden som følge af Newtons tyngdelov $F_1 = F_2 = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$. I modsætning til 2-legeme problemet, som er beskrevet og forstået til fulde af Kepler's og Newton's love, er 3-legeme problemet stadig uløst. Der findes en del lette løsninger fx kan man reducere problemet til et 2-legeme problem, hvis en af masserne er meget større end de andre, som fx Solen i forhold til Jorden og Månen, her er der tale om to planeter, der følger Kepler-baner i solens enorme tyngdebrønd. En anden reduktion er at flytte en af masserne så langt væk, at den ikke kan interagere med de to andre objekter, denne temmelig trivielle løsning var den første computeren fandt. Det spændende er dog at prøve at finde stabile baner, hvor masserne er nogenlunde ens, og hvor objekterne ikke ligger i et matematisk ustabilt saddelpunkt, hvor den mindste ændring fører til ustabilitet.

Det jeg synes er spændende ved studiet af 3-legeme problemet er, at det kan give svar på, om det vil være muligt for planeter at have stabile baner i flerstjernesystemer og derved åbne for muligheden for biologisk liv flere steder i universet.

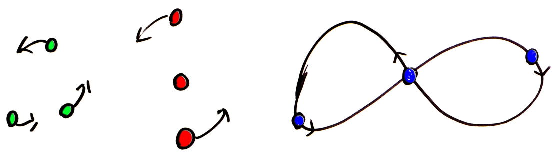
### Klima

Hvis man kigger på et system bestående af en stjerne og en planet og gerne vil have, at liv, som vi kender det, får en chance for at udvikle sig, skal klimaet være nogenlunde stabilt. Det vil under normale situationer sige, at temperaturen og indstrålingen ikke må have for store udsving, og som følge deraf, må planetbanen ikke have for store udsving væk fra stjernen. For to legemer er banen med absolut mindst udsving en cirkulær bane og Jordens bane har da også en meget lav excentricitet 0.02 [1]. Den altafgørende faktor her er, at variationen af afstanden mellem planet og stjerne skal minimeres for at få øget stabiliteten af klimaet. I 3-legeme problemet må det også være variationen af afstanden, der er afgørende, her er der så bare tre af dem, som linjestykkerne i en trekant. Dvs. for at finde et stabilt klima, skal summen af linjestykkerne (abc) i trekanten variere så lidt som muligt.




**Figur 1.** Tre legemer med angivelse af indbyrdes afstande og vektorpile, der indikerer bevægelserne. Variationen af trekantens samlede sidelængder skal minimeres.

Der findes allerede en del geometriske løsninger til 3-legeme problemet. Man kan placere de tre objekter i hjørnerne af en ligesidet trekant, som roterer rundt om et fælles punkt, Lagranges løsning, sætte et af legemerne i midten og de andre til at kredse udenom, Eulers løsning, eller sætte dem til at svinge rundt i noget der ligner et ottetal, Montgomerys løsning[2]. Eulers løsning er aldrig stabil, Lagranges løsning er kun stabil, hvis et af objekterne er meget tungere end de andre og ottetals løsningen er KAM[1] stabil. [3]



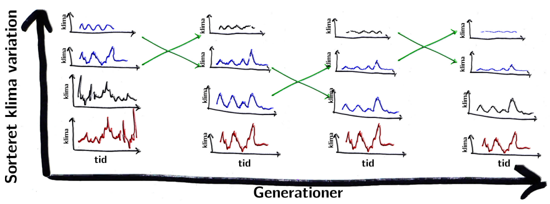
**Figur 2.** Kendte løsninger (fra venstre mod højre): Lagranges løsning, Eulers løsning og Montgomerys løsning.

### Unaturlig udvælgelse

At udvælge individer af dyr med særlige egenskaber og avle på dem gennem generationer er en efterprøvet og meget effektiv måde at forædle og skabe nye racer på. Der findes et utal af eksempler, lige fra sortbroget malkekvæg, der efterhånden kan producere langt mere

[1] Kolmogorov-Arnold-Moser

end en kalv kan drikke (68 l mælk om dagen), til hunderacen Chihuahua, der må siges at være meget forskellig fra det ulvelignende dyr, hunde formentlig stammer fra. Samme metode kan bruges i computerverdenen. Hvis man har en simulering som fx, hvordan banerne i 3-legeme problemet udvikler sig med tiden, kan man udvide den med en funktion, der giver simuleringen point, alt efter hvor godt den har opført sig, lidt som kåringen af præmiekvæg på dyrskuet. Denne præmiering skal give point til de systemer med mindst variation i klimaet og straffe de systemer, der prøver at snyde ved at flytte legemerne langt væk fra hinanden. Hvis man, efter at have kørt en masse simuleringer igennem, kun tillader de systemer med score over gennemsnittet at "have sex", vil populationen i næstkommende generation have lidt bedre egenskaber end den forrige. Allerede efter et par generationer med fokus på et stabilt klima kan man se klare forbedringer i 3-legeme systemernes stabilitet. Opgaven er nu flyttet fra selv at skulle finde på stabile systemer til at finde ud af, hvordan man bedst kan parre to "solsystemer", hvilke udvælgelseskriterier man skal bruge, og hvor stor mutationsraten skal være.




**Figur 3.** For hver generation sorteres systemernes klimavariationen over simuleringsforløbet og der udvælges to tilfældige forældresystemer fra de bedste 10 % til skabelsen af næste generation. Over tid minimeres udsvingene.

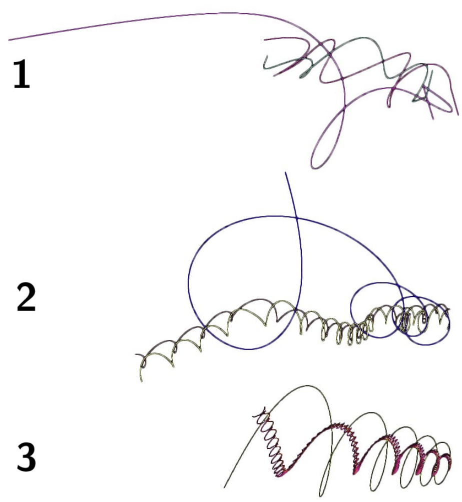
## Sex for Solsystemer

Sex kan beskrives som noget så kedeligt som en tilfældig blanding af egenskaber (eller gener som koder for egenskaber) + fejl ($\epsilon$). 3-legeme problemet har 21 startparametre idet der er tre objekter, hver med startposition $\vec{s_n} = [p_x, p_u, p_z]$, starthastighed $\vec{v_n} = [v_x, v_y, v_z]$ og masse $m_n$. Når man blander to systemer, kan man enten sætte $\vec{s_1} + \vec{\epsilon}$ sammen med $\vec{v_2} + \vec{\epsilon}$ og tage en af masserne, gå ned i de enkelte vektorer og bytte rundt i elementerne derinde, så man ender med at få noget i stil med $\vec{s_1} \overleftrightarrow{sex} \vec{s_2} = [p_{x1} + \epsilon, p_{y1} + \epsilon, p_{z2} + \epsilon]$ eller, som jeg har haft stor succes med, kombinere de to tilfældigt. Det vigtige er, at blandingen sker tilfældigt og at der bliver lagt en tilfældig, positiv eller negativ, fejl til. Den tilfældige fejl ($\epsilon$) er vigtig, da ingen af systemerne er specielt stabile og fejlen tillader den efterfølgende generation af systemerne at finde på 'noget nyt' i forhold til forældresystemerne. Man kan med fordel eksperimentere med forskellige distributioner af $\epsilon$ som fx den eksponentielle distribution nedenfor.

$$\epsilon(x;\lambda) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases} \tag{1}$$

Hvor $\lambda > 0$ bestemmer mutationsraten. En eksponentiel distribution tillader, at fejlen af og til kan få lov til at blive overordentlig stor. Det giver populationen mulighed for at springe over lokale klimavariationsminima. Sagt med andre ord, man tillader, at der er en sandsynlighed for, at et af havregrynene kan springe op af skålen og ned på gulvet, så computeren kan finde ud af, at der er mindre potentiale og mere stabilt dér, og flytte resten af morgenmaden derned.

## Udvikling gennem generationerne




**Figur 4.** Gennem generationerne udvikler systemerne stabile baner.

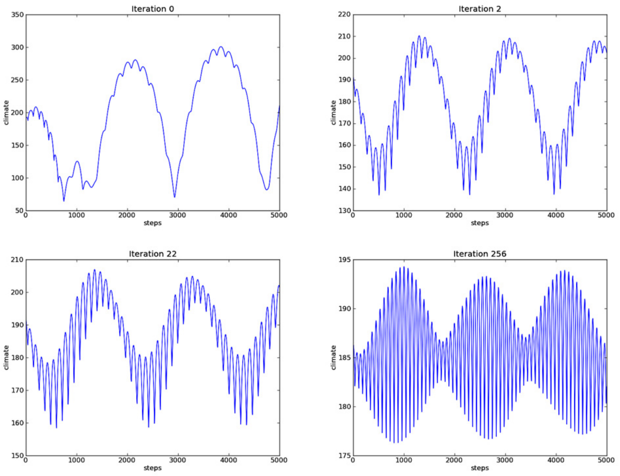
Figuren ovenfor viser, hvordan banerne udvikler sig igennem generationerne. Partikelfysikere kan forestille sig et tågekammer, andre kan forestille sig, at de tre legemer bliver skudt ud af en bordbombe, som står et par meter væk ovre til højre og legemerne trækker strimler af farvet konfettipapir efter sig, som afslører banernes tidsudvikling. Der er perspektiv i figuren og det vil sige, at skønt nr. tre ser ud til at blive større, er det faktisk fordi den kommer tættere på.

1. Systemet er kun et par generationer gammelt, de forrige generationer havde en kollision meget tidligt i udviklingen. Systemet opfører sig aldeles kaotisk og det ender da også med, at et af legemerne bliver slynget ud af de to andre.

2. Dette system har en hel del flere generationer bag sig og opfører sig næsten stabilt, men noget der ligner en ustabil resonans, ender med, at også dette system slynger et af legemerne ud.

3. Efter ca. 200 generationer har dette system opnået en god stabilitet. To af legemerne kredser tæt op ad hinanden vinkelret på et lidt tungere legeme i modsætning til sol-jord-måne systemet hvor de ligger i ekliptikaplanet. Ydermere er masserne næsten lige store og fordelt i forholdene $1x$, $(1 + 3/2)x$ , $(2 + 1/3)x$, hvor $x$ kan være en vilkårlig masse fx en solmasse.

I evolutionsbiologien arbejder man med, at arter pludselig kan splitte op eller ændre sig, i fysikken har vi faseændringerne som man bl.a. også ser i "simuleret udglødning". Det samme gør sig gældende her.




**Figur 5.** Tidsudviklingen af middel linjelængden af trekanten fra figur 1.

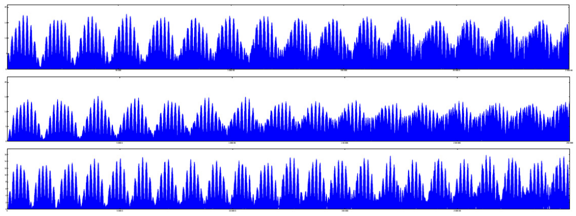
Figur 5 viser klimaudviklingen gennem generationerne, x-akserne viser antallet af tidsstep, y-akserne en enhedsløs middelafstand. Øverst står iterationnummeret, dvs., hvor mange generationer computeren har afprøvet. øverst til venstre ses begyndelseskonfigurationen, to legemer kredser tæt op ad hinanden og og gør kurven bølget, samtidig varierer trekanten meget, det er rent held, at der ikke er sammenstød i det simulerede tidsrum. Allerede i næste generation har systemet fundet en art, der er nogenlunde stabil, den fortsætter med at raffinere sig fra en variation på 70 til 50, indtil iteration 256, hvor systemet pludselig finder en ny art/fase som kun varierer med ca 20.

## Stabilitet

En egenskab ved kaotiske systemer, som volder problemer med vejrudsigten er, at den mindste forskel i systemerne forøges eksponentielt med tiden og sørger for, at vejrudsigten bliver mere unøjagtig og mildest talt ubrugelig jo længere man prøver at køre simuleringen. Hvis den genetiske algoritme til løsning af 3-legeme problemet, har fundet en konfiguration, som er lige så stabil som en blyant, der står på spidsen, hvor selv den mindste ændring vil føre til et brat kollaps af systemets stabilitet, er konfigurationen ikke så interessant astrobiologisk. Vilkårene for liv i et sådan system vil være, svære da den mindste ændring, som en fremmed stjerne, der bevæger sig forbi systemet eller en større asteroide, vil kunne få den spinkle stabilitet i stjernesystemet til at bryde totalt sammen. Det er derimod langt mere interessant astrobiologisk, hvis der er en 'matemagisk' kvasistabilitet i systemet, som får systemet til at falde tilbage i samme position (som kugler i en skål) eller blot fortsætte i et nyt stabilt forløb på et stabilitetsplateau (som en bordoverflade, hvor man godt kan flytte en hel del rundt på tingene, uden de falder ud over kanten).

Figur 6 viser tidsudviklingen af forskellen mellem klimaet for det optimerede system og det optimerede system + tre forskellige perturberede af samme størrelsesorden som den genetiske fejl.

Simuleringen her er 50 gange længere, end det den genetiske algoritme optimerede. Aksernes størrelse er underordnet, det vigtige er, at det er tydeligt, at ingen af de tre perturberede systemer udvikler sig eksponentielt anderledes end det oprindelige system. Havde de perturberede systemer lagt sig ind i samme fase som det oprindelige, havde kurven konvergeret mod 0, dette ser heller ikke ud til at være tilfældet. Derimod ser det ud til, at systemerne er blevet faseforskudt og ellers udvikler sig lige så stabilt som det originalt optimerede system.



**Figur 6.** Forskellen mellem tidsudviklingen i et færdigudviklet stabilt systen, og samme system hvor man har flyttet en anelse rundt på legemernes positioner fart og retning.

Til sidst kommer spørgsmålet om stabiliteten alene kommer fra geometrien, eller fra usikkerhed i computerens udregning. Indtil videre har jeg kun brugt "double precision" og faste integrationsskridt, noget jeg vil overveje at forbedre i en evt. fremtidig udgave af programmet.

## Fremtiden for genetiske algoritmer

Så vidt jeg kan se, er genetiske algoritmer et vidunderligt værktøj, hvis anvendelsesmuligheder vil stige i takt med computerkraften. Fysikken bag 3-legeme problemet har været kendt i 325 år, men det at finde startbetingelserne til stabile baner volder stadig problemer. Genetiske algoritmer og simuleret udglødning kan helt sikkert hjælpe til i lignende inverse problemer. "Rapid prototyping", som 3d-printeren, kan i den forbindelse hjælpe til i situationer, hvor selv kraftige computere og fysiske modeller har svært ved at følge med. Der er masser af sjove projekter at kaste sig over. For eksempel raketdyser eller Polywell/Farnsworth fusionsreaktoren.

## Litteratur

[1] http://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/factsheet/earthfact.html

[2] http://www.ams.org/samplings/feature-column/fcarc-orbits1

[3] A New Solution to the Three-Body Problem Richard Montgomery http://www.ams.org/notices/200105/fea-montgomery.pdf

[4] http://www.blprnt.com/smartrockets/

*Asmus Koefoed* er cand. scient i fysik og for tiden aktiveret i job med løntilskud på Niels Bohr Institutet, mens han prøver at skaffe funding til studier med Mars Science Laboratory. *asmus.koefoed@nbi.ku.dk*.