Noget om ellipsen

Af Mogens Esrom Larsen, Institut for Matematiske Fag, Matematisk Afdeling, Københavns Universitet

Ellipsens geometri og anvendelse i Keplers beskrivelse af planeters bevægelser og de deraf følgende Newton's love.

Ellipsen er et af de første matematiske fænomener, vi støder på allerede i barndommen. Det er nemlig typisk randen af en isvaffel. Det er ikke tilfældigt. Ellipsen er det lukkede keglesnit, altså fællesmængden mellem en *kegle* (vaflen) og en *plan* (snittet). Der er også andre keglesnit, der er ubegrænsede, nemlig parablen og hyperblen.

Lad os nu forestille os en kegle, dvs. i rummet alle linier gennem et givet punkt og et punkt på en given cirkel. For nemheds skyld vælger vi punktet på normalen til cirklens plan i cirklens centrum.

Vi skærer nu keglen med en plan i en ellipse. Som en iskugle i en vaffel lægger vi en kugle, så den netop tangerer ellipsens plan i et punkt, O, og keglen i en cirkel, der er parallel med frembringercirklen for keglen. Betragt nu et vilkårligt punkt på ellipsen, P. Frembringeren gennem P skærer cirklen i punktet Q. Da PO og PQ er tangenter til kuglen, er de lige lange:

$$PO = PQ$$

Keglens frembringere danner vinklen ϕ med tangentcirklens plan, og snitplanen vinklen ψ med tangentcirklens plan, og de to planer skærer hinanden i en linie, der kaldes *ledelinien.* Vi projicerer nu P på ledelinien i punktet L og på cirklens plan i punktet P'. Af trekanterne $\triangle PQP'$ og $\triangle PQL$ fås

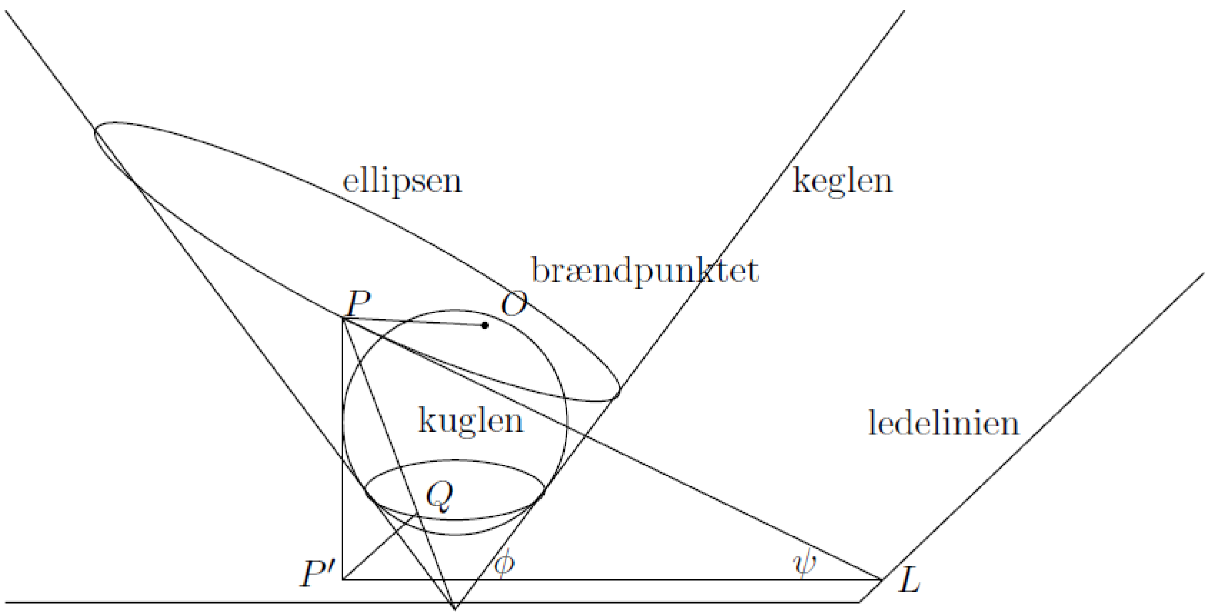
$$\begin{aligned} PP' &= PQ \sin\phi \\ PP' &= PL \sin\psi \end{aligned}$$

Altså finder vi

$$PO = e \cdot PL, \text{ hvor } e = \frac{\sin\psi}{\sin\phi}$$

Faktoren e kaldes ellipsens *excentricitet.* Hvis $e = 0$ er snitplanen parallel med cirklens plan og ellipsen udarter til en cirkel. Egentlige ellipser har $0 < e < 1$. (Tilfældet $e = 1$ giver et snit, der er parallelt med en frembringer og dermed et snit, der er en parabel.)

Vi har nu fundet den beskrivelse af ellipsen, at afstandene til brændpunktet og ledelinien har et konstant forhold.



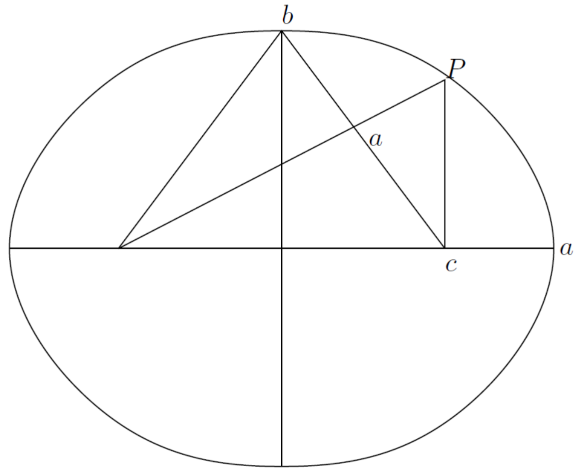
Figur 1. Ellipsen som keglesnit.

Ellipsen som projektion

Nu kan man også tænke sig en kugle oven over ellipsen, således at den også tangerer snitplanen i et punkt inden for ellipsen og keglen i en cirkel. Da vil afstandene fra P til det andet brændpunkt og til den anden cirkel også være ens. Men det betyder, at summen af afstandene til de to brændpunkter er lig med afstanden mellem de to cirkler målt ad en frembringer for keglen. Altså er denne sum konstant, lad a være det halve af denne.

Ellipsen er derfor symmetrisk. Og dens *storakse,* dvs aksen gennem brændpunkterne, er lig med $2a$. Den halve storakse er altså a, og lad den halve akse vinkelret herpå, kaldet *lilleaksen,* være b og den halve afstand mellem brændpunkterne være c. Som det fremgår af nedenstående figur er der den simple sammenhæng mellem storaksen, lilleaksen og brændpunktet:

$$b^2 + c^2 = a^2$$



Figur 2. Summen af brændstrålerne er konstant.

Ellipsens ligning

Vi lægger et koordinatsystem med origo midt mellem brændpunkterne, storaksen som x–akse og lilleaksen som y–akse. Lad nu et vilkårligt punkt, P, på ellipsen have koordinater (x, y).

Så må de opfylde ligningen

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a$$

Vi kvadrerer og isolerer det dobbelte produkt – og deler med 2 – til

$$\sqrt{(x^2 + y^2 + c^2 - 2xc)(x^2 + y^2 + c^2 + 2xc)}$$
$$= 2a^2 - (x^2 + y^2 + c^2)$$

Vi kvadrerer og ganger ud til

$$(x^2 + y^2 + c^2)^2 - (2xc)^2$$
$$= 4a^4 + (x^2 + y^2 + c^2)^2 - 4a^2(x^2 + y^2 + c^2)$$

som arrangeres til

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

eller kønnere

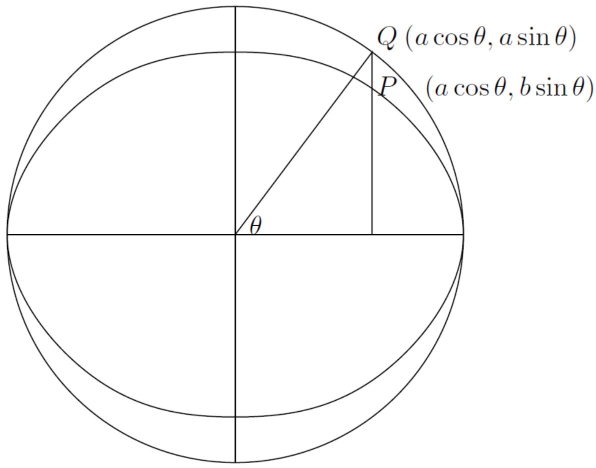
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Ellipsens parametrisering

En oplagt parametrisering af denne ligning er

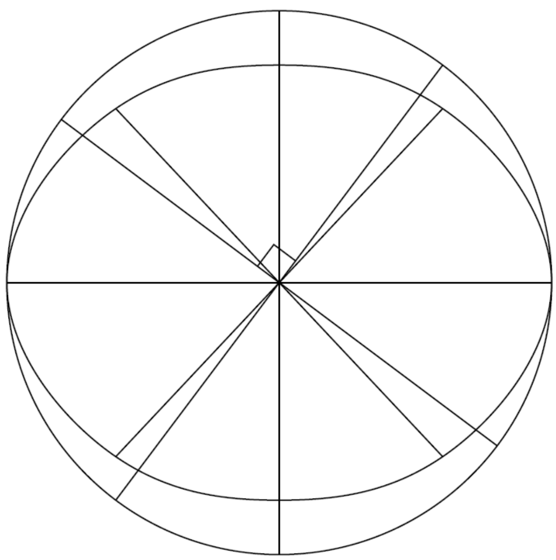
$$(x, y) = (a\cos\theta, b\sin\theta)$$

der viser ellipsen som en projektion af cirklen med radius a fra en skråplan lodret ned på en vandret plan.

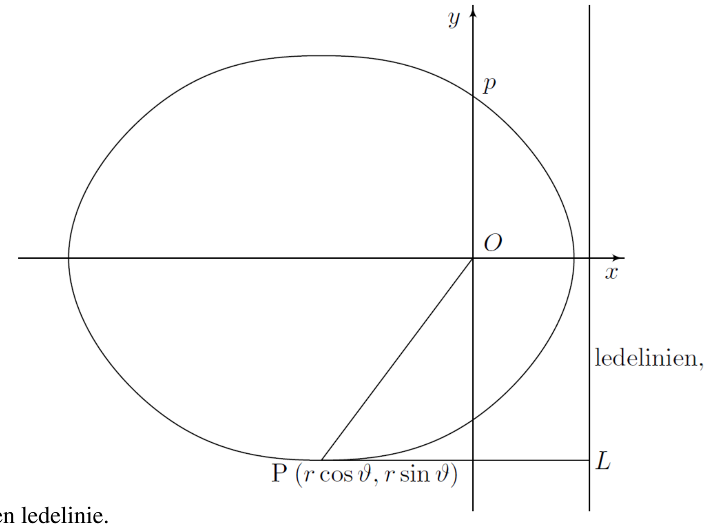


Figur 3. Projektionen af en skrå cirkel.

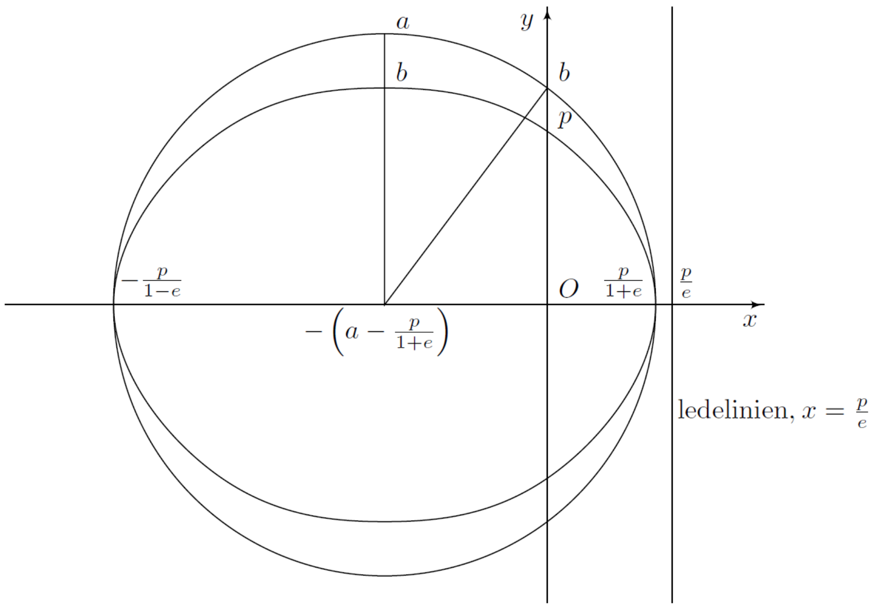
Denne fortolkning har en charmerende konsekvens. Et par diametre i cirklen, der står vinkelret på hinanden, har egenskaber, der nedarves ved projektionen. Nemlig, at tangenterne i enderne er parallelle med den anden diameter, og at korderne, der er parallelle med den ene diameter, bliver halverede af den anden. Et sådant par af diametre i ellipsen kaldes *konjugerede.*



Figur 4. De konjugerede diametre.



Figur 5. Et brændpunkt og en ledelinie.



Figur 6. Ellipsens parametre.

Ellipsens anvendelse i astronomi

Ellipsen som keglesnit kendes fra oldtiden. Euklid (300 fvt) og Appollonios (200 fvt) har skrevet bøger herom, hvoraf kun den sidstnævntes er bevaret. Men det var Johannes Keplers (1571–1630) måling af Mars i 1608, der inspirerede ham til at erstatte de sædvanlige cirkelmodeller for planetbanerne, som blev brugt fra Ptolemaios (3. årh) til Tyge Brahe (1546–1601), med en elliptisk model med Solen i det ene brændpunkt.

Til dette formål er det bekvemt at skifte koordinater, så Solens brændpunkt kommer til ligge i origo (se figur 5).

Vi vælger længden p, så ledelinien får koordinaterne $\left(\frac{p}{e}, y\right)$. Tallet p bestemmes nedenfor.

At $PO = ePL$, betyder, at

$$r = e\left(\frac{p}{e} - r\cos\vartheta\right)$$

Ellipsen har derfor fremstillingen $(r\cos\vartheta, r\sin\vartheta)$, hvor

$$r = \frac{p}{1+e\cos\vartheta}$$

Specielt ses, at for $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ bliver $r = p$; dvs p er skæringen af ellipsen med den positive ordinatakse.

Nu finder vi for $\vartheta = 0,\ \pi$ værdierne

$$r = \frac{p}{1+e} \text{ og } r = \frac{p}{1-e}$$

Den halve storakse er derfor gennemsnittet

$$a = \frac{p}{1-e^2}$$

Ellipsens midtpunkt er således $\frac{p}{1+e} - a$, hvorfor vi finder lilleaksen af Pythagoras (6. årh fvt)

$$b^2 = a^2 - \left(\frac{p}{1+e} - a\right)^2 = \frac{p}{1+e}\left(2a - \frac{p}{1+e}\right)$$

Indsættes udtrykket for a, fås

$$b^2 = \frac{p^2}{1-e^2} = pa$$

hvoraf

$$b = \frac{p}{\sqrt{1-e^2}} \text{ og } p = \frac{b^2}{a} \text{ og } \frac{b}{a} = \sqrt{1-e^2}$$

Keplers første lov

Lad os nu betragte en planet, der bevæger sig om Solen i origo i de polære koordinater, som vi vil betegne med den komplekse eksponentialfunktion

$$e^{i\vartheta} = \cos\vartheta + i\sin\vartheta$$

på formen

$$z(t) = r(t)e^{i\vartheta(t)} = r(t)(\cos\vartheta(t) + i\sin\vartheta(t))$$

Keplers første lov (1609) siger, at arealet, der dækkes af brændstrålen fra Solen er proportionalt med den forløbne tid.

Arealet af brændstrålens tur fra t_1 til t_2 er

$$A(t_2) = \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2} r^2(t)\vartheta'(t)dt$$

Altså er

$$A'(t) = \frac{1}{2} r^2(t)\vartheta'(t)$$

og

$$A''(t) = r(t)\,r'(t)\,\vartheta'(t) + \frac{1}{2} r(t)^2\,\vartheta''(t)$$

Keplers første lov siger altså, at

$$A'(t) = k \quad \text{og} \quad A''(t) = 0$$

Derfor gælder, at

$$\begin{aligned} z'' &= \left(r'' - r(\vartheta')^2\right)e^{i\vartheta} + (2r'\vartheta' + r\vartheta'')ie^{i\vartheta} \\ &= \left(r'' - r(\vartheta')^2\right)e^{i\vartheta} = \frac{r'' - r(\vartheta')^2}{r} z \end{aligned}$$

da $A'' = 0$, så

$$\frac{z''}{z} = \frac{r'' - r(\vartheta')^2}{r} \in R$$

Dvs at accelerationen z'' er proportional med z, altså rettet mod Solen.

Da

$$\frac{1}{2} r^2\vartheta' = k$$

fås, at

$$z'' = \left(r'' - \frac{4k^2}{r^3}\right)e^{i\vartheta}$$

Newtons lov

Når planeten følger ellipsen, får vi af ligningen ovenfor

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\vartheta}$$

at

$$r' = \frac{pe\sin\vartheta}{(1+e\cos\vartheta)^2}\vartheta' = \frac{pe\sin\vartheta}{(1+e\cos\vartheta)^2}\cdot\frac{2k}{r^2} = \frac{2ek\sin\vartheta}{p}$$

hvoraf

$$r'' = \frac{2ek\cos\vartheta}{p}\vartheta' = \frac{2k\left(\frac{p}{r} - 1\right)}{p}\cdot\frac{2k}{r^2} = \frac{4k^2}{r^3} - \frac{4k^2}{pr^2}$$

som indsat i z'' giver Newtons (Isaac Newton 1642–1727) lov (1686)

$$z'' = -\frac{K}{r^2}e^{i\vartheta}$$

hvor $K = \frac{4k^2}{p}$.

Ellipsens areal er $\pi ab = kT$, hvor T er omløbstiden. Altså er

$$k = \frac{\pi ab}{T}$$

så da $p = \frac{b^2}{a}$, finder vi

$$K = \frac{4k^2}{p} = \frac{4\pi^2a^2b^2a}{T^2b^2} = \frac{4\pi^2a^3}{T^2}$$

Keplers anden lov (1609) siger, at K er den samme for alle planeter.

PS

Tillad mig en personlig kommentar. I forbindelse med Tor Nørretranders (1955–) "Mindship" i 1996 blev en af hans foredragsholdere inviteret til at optræde i den nystartede TV–kanal DR2. De ville have ham til at forklare Gödels (Kurt Gödel 1906–78) sætning om, at et aksiomsystem, der er stærkt nok til at kunne definere de naturlige tal, ikke kan bevises at være modsigelsesfrit. Det ville han ikke, fordi det var hans erfaring, at det gik hen over hovedet på næsten ethvert publikum. Nå, så ringede redaktøren til Matematisk Institut og fik fat i mig, – de fleste var gået hjem fredag eftermiddag, – som brugte en halv time på at forklare, hvor enig jeg var i, at jeg heller ikke kunne forklare resultatet på 5 minutter. Ikke desto mindre fik de om aftenen lyst til hente mig ind til en 5 minutters indledning om matematik i almindelighed i form af et interview.

Normalt aftaler man spørgsmålene forud, men efter de aftalte spørgsmål kom det uvarslede: "Hva' nyt' er 'et te'?" Der blev ellipsen min redning, fordi jeg kunne fortælle, at den havde været ren matematik i 2000 år, men med Kepler og Newton blev beskrivelsen af planeters og satellitters baner.

Så uden den var der ingen, der kunne modtage DR2s signaler!

Litteratur

[1] Vagn Lundsgaard Hansen (1992), Temaer fra geometrien, Matematiklærerforeningen.

Mogens Esrom Larsen er tidligere lektor i matematik på Københavns Universitet og har været redaktør ved Kvant siden starten.