Afkølingstid – breddeopgaver 45–46 med didaktisk kommentar

Af Jens Højgaard Jensen, IMFUFA, NSM, RUC

Mit formål med artikelserien om breddeopgaver er – udover at gøre opmærksom på RUCs fysikuddannelse – dobbelt: Dels udvælger jeg opgaverne, så de kan have interesse som fysikproblemer i egen ret. Dels udvælger jeg dem med henblik på at kunne knytte didaktiske overvejelser til dem af interesse for fysikundervisere. I første omgang i forhold til universitetsundervisning. Men i anden omgang kunne der måske også trækkes paralleller til andre undervisningsniveauer.

Her bringes løsning og kommentar til opgaverne fra forrige nummer samt to nye opgaver. Opgaverne i sidste nummer af KVANT var disse breddeopgaver fra RUC (nr. 45 og 46 i rækken her i KVANT):

Breddeopgave 45 og 46. Afkølingstid

Hvad er størrelsesordenen af tiden, det vil tage for varmen at fordele sig i en jernklump af Jordens størrelse med et opvarmet indre? I E. S. Johansens ældre lærebog i varmelære er der følgende data for jern: massefylde ved $18°\mathrm{C}$: $7.86\ \mathrm{g\ cm}^{-3}$, *lineær udvidelseskoefficient mellem* $0°\mathrm{C}$ *og* $100°\mathrm{C}$: $0.0000125\ \mathrm{grad}^{-1}$, *varmefylde ved* $18°\mathrm{C}$: $0.111\ \mathrm{cal\ g}^{-1}\ \mathrm{grad}^{-1}$ *og varmeledningsevne ved* $18°\mathrm{C}$: $0.20\ \mathrm{cal\ grad}^{-1}\ \mathrm{cm}^{-1}\ \mathrm{s}^{-1}$. *Begrund svaret.*

Når man sætter hånden på et stykke koldt metal mærkes en kraftig varmestrøm fra hånden ud i metallet. Hvordan ændrer varmestrømtætheden sig med tiden (til korte tider)? Begrund svaret ved en dimensionsanalyse.

Løsning

45. Opgaven kan løses ved dimensionsanalyse. Afkølingstiden, dvs. en karakteristisk tid indenfor hvilken varmen i jernklumpens indre fordeler sig, så temperaturen er den samme overalt, må alene afhænge af jernklumpens radius R, jernets varmefylde per volumen, c, og jernets varmeledningsevne k. Og måske af temperaturforskellen ΔT mellem centrum og overfladen af jernklumpen ved start. Hvis vi skulle løse opgaven mere eksakt ville vi nemlig stille en differentialligning op for temperaturen som funktion af afstand til centrum og tid ved at sætte forskellen mellem energistrømmen per tid ind og ud af to infinitesimalt adskilte kugleskaller lig med ophobningen af energi per tidsenhed i mellemrummet mellem kugleskallerne. Her er k bestemmende for størrelsen af energistrømmen og c bestemmende for energiophobningen. Herudover må løsningen til differentialligningen afhænge af temperaturvariationen karakteriseret ved ΔT som begyndelsesbetingelse og R på grund af randbetingelsen, at varmestrømtætheden i jernklumpens overflade skal være nul. Inputvariable, som afkølingstiden kan tænkes at afhænge af, er altså $k,\ c,\ \Delta T$ og R. Da dimensionen af k er givet ved [k] = M L T^{-3} K^{-1} og dimensionen af c ved [c] = M L^{-1} T^{-2} K^{-1}, kan en tid kun dannes ved en kombination af de fire inputvariable, hvis k og c indgår i kombinationen c/k, da dimensionen M ellers ikke udgår. Idet [c/k] = L^{-2} T, fremgår det heraf, at den efterspurgte afkølingstid τ ikke kan afhænge af ΔT. Den eneste måde, hvorpå inputvariablene kan kombineres til en tid, er da:

$$\tau = aR^2\frac{c}{k}, \tag{1}$$

hvor a er et dimensionsløst tal. Indsættes materialeværdierne for jern fra opgaveteksten og $R = 6000$ km, fås $R^2\frac{c}{k}$ til at være $50 \cdot 10^9$ år.

46. Varmeledningsevnen af metallet er meget større end varmeledningsevnen af hånden. Derfor vil tempoet for varmeafgivelsen fra hånden til metallet være bestemt af varmestrømningen i hånden. Varmestrømtætheden af varmestrømmen fra hånden ud i metallet afhænger derfor tilsvarende til omstændighederne i opgave 45 af varmeledningsevnen k i hånden, og af håndens varmefylde per volumen, c. Men da hånden til korte tider fungerer som et uendeligt halvrum uden nogen karakteriserende længde, kan der i modsætning til i opgave 45 ikke findes nogen karakteristisk tid for fænomenet. Derimod kan vi godt ved dimensionsanalyse finde ud af, hvorledes varmestrømtætheden ved grænsefladen mellem hånd og metal, j, afhænger af $k,\ c$, temperaturforskellen ΔT mellem hånd og metal til en start, og tiden t, der er gået fra hånden blev sat på metallet. Idet dimensionen [j] = M T^{-3}, [k] = M L T^{-3} K^{-1}, [c] = M L^{-1} T^{-2} K^{-1}, [ΔT] = K og [t] = T, fås ved enkle regninger:

$$j(k, c, \Delta T, t) = b\Delta T\left(\frac{kc}{t}\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{2}$$

hvor b er et dimensionsløst tal. Varmestrømtætheden fra hånden ud i metallet ændrer sig altså med tiden som $t^{-\frac{1}{2}}$.

Kommentar

Uanset hvilken form man antager for temperaturfordelingen til t = 0, er det ikke nogen nem sag at besvare opgave 45 ved at løse varmeledningsligningen, dvs. finde temperaturen som funktion af tiden og afstanden til centrum. Jeg kunne i alle tilfælde ikke, før jeg fik hjælp til det af min kollega Tage Christensen. I første omgang kunne jeg dog hjulpet af min medlærer på Breddekurset, Poul Winther Andersen, uden at nå frem til det endelige resultat godt ud fra varmeledningsligningen og randbetingelsen, at varmestrømtætheden i overfladen skal være nul, uanset temperaturfordelingen til en start, argumentere for, at afkølingen finder sted med en henfaldstid af størrelsesordenen R^2c/k som fundet ved dimensionsanalysen. Ligeledes kan der generelt argumenteres for, at ΔT kun indgår som proportionalitetskonstant i udtrykkene for varmestrømtætheder og temperaturforskelle som funktioner af tid og sted i begge de to opgavesituationer. Det hænger sammen med, at varmeledningsligningen som differentialligning for $T(t, r)$ er lineær. Vi kunne derfor godt ved dimensionsanalyseløsningen af opgave 45 på forhånd have udeladt ΔT som inputvariabel.

Hvor tidsafhængigheden af varmestrømtætheden i opgave 45 kan beskrives ved hjælp af en karakteristisk henfaldstid, gælder det ikke for tidsafhængigheden af varmestrømtætheden, der er svar på opgave 46. Det er interessant, at det forhold, at løsningerne på de to opgaver nødvendigvis matematisk set må være kvalitativt forskellige, allerede fremgår af dimensionsovervejelser. Indgår der en karakteristisk længde i varmeledningsproblemet kan der dannes en karakteristisk tid. Det kan der derimod ikke, hvis der ikke indgår en karakteristisk længde i problemet.

I en tidligere artikel i KVANT har jeg i kommentarerne til breddeopgave 42 og 43 redegjort for, at det tidligere såkaldte Breddekursus på RUC siden 2007 har været niveaudelt i de to kurser “Fysisk problemløsning I” og “Fysisk problemløsning II” med hver sine tilhørende eksamener. Opgave 45 er en eksamensopgave fra eksamen i Fysisk problemløsning I. Den var derfor ment som en opgave, der skulle høre til i den nemmere ende af breddeopgavespektret. Og med det interessante resultat, at Jorden ikke er gammel nok til, at der har været tid til udjævning af temperaturforskelle, når der ses bort fra konvektion. Men opgaven viste sig både for svær og for nem.

Det var for nemt at få øje på, at besvarelsen lå gemt i en dimensionsanalyse. Af de lidt flere end 10, der var til eksamen, gik de fleste direkte i gang hermed. Men desværre på en ret så automatiseret måde. Således inddrog de fleste fejlagtigt den opgivne lineære udvidelseskoefficient i analysen. Den havde jeg opgivet i opgaveteksten, fordi den sammen med massefylden, varmefylden og varmeledningsevnen er netop de materialkonstanter for jern, der er data for i E. S. Johansens lærebog. Og fordi der skulle være lidt forhindring på vejen til dimensionsanalysen som rutineteknik, når nu relevante talværdier til at nå frem til resultatet $50 \cdot 10^9$ år var oplyst. Men rutinen lod sig altså ikke udfordre under eksamenspresset.

Under indtryk af de studerendes automatiserede måde at besvare opgave 45 til eksamen på har jeg i ovenstående løsning og kommentar til opgaven forsøgt at antyde, hvilken slags mere eller mindre eksplicitte overvejelser jeg selv oprindeligt må have lagt til grund, da jeg formulerede opgaven og fandt den overkommelig at besvare ved dimensionsanalyse. Og de ligger en del ud over, hvad der kan forventes af de studerende. På den vis var opgaven for svær. I modsætning til opgave 46 er den ikke en god breddeopgave. I opgave 46 (fra Tage Christensens hånd) inviteres der ikke på samme måde til rutineopførsel. På den anden side forudsætter opgave 46 ikke helt så megen kvalitativ erfaring med differentialligningsløsning som opgave 45.

Breddeopgave 47 og 48. Relativistisk bordtennis og neutronabsorption

Inden næste nummer af KVANT udkommer, kan læserne eventuelt overveje løsningen til disse to opgaver fra breddekurset på RUC (fra vintereksamen 2010 og vintereksamen 2009, nr.47 og 48 i rækken her i KVANT):

Et bat bevæges imod en bordtennisbold kastet op til serv. Find ved en relativistisk beregning farten af bordtennisbolden umiddelbart efter at være blevet stødt til af battet. Begrund svaret.

En neutron med stor fart absorberes af en hvilende atomkerne. Med hvilken fart bevæger den nye atomkerne sig herefter? Begrund svaret.

Løsninger og kommentar bringes i næste nummer.