Om det uendeligt smaa og det uendeligt store i Mathematikken[1]

Af Mogens Esrom Larsen, Institut for Matematiske Fag, Matematisk Afdeling, Københavns Universitet

Man er tilbøjelig til at betragte den sædvanlige udvidelse af de rationale tals legeme til de reelle tals som nærmest kanonisk. Det kom som en overraskelse, at John Conways generalisering af Dedekinds snit førte til en langt mere omfattende udvidelse, der gav uendeligt mange flere tal, både uendeligt små og uendeligt store, samt en naturlig definition af begrebet “spil”.

Allerede Euklid er betænkelig ved at tage ordet “uendelig” forfængeligt. Han skriver, at der er flere primtal end ethvert (endeligt) tal. Argumentet herfor er enkelt: Hver gang vi har et antal primtal, $p_1, p_2, ..., p_n$ så vil enhver primfaktor i tallet $p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_n + 1$ være et nyt primtal.

Endnu tidligere måtte Pythagoras sande, at selv de uendeligt mange rationale tal ikke slår til. Den retvinklede ligebenede trekant med kateter af længden 1 har et kvadrat på hypotenusen (eller et areal[2]) der er lig 2. Og intet rationalt tal har kvadratet 2. Da fjernsynet kom til Danmark, optrådte Svend Bundgaard på skærmen med denne oplysning. Han skrev et rationalt tal som en uforkortelig brøk, p/q, og sluttede, at hvis $p^2 = 2q^2$, så må p være lige og derfor q ulige, altså $p = 2r$, hvor r også et helt tal. Men så kan vi forkorte til $2r^2 = q^2$, hvorfor q må være lige. En modstrid. Det fortælles, at dette ikke gav den ventede PR for faget.

Grækerne valgte at fokusere på geometriske størrelser frem for tal, men løb straks ind i problemer: En terning med rumfanget 2 forlanger jo konstruktionen af $\sqrt[3]{2}$, en suspekt konstruktion. Og cirklens kvadratur, dvs konstruktionen af et kvadrat med arealet π, kommer man ikke i nærheden af.

De rationale og de reelle tal

Et uendeligt fænomen inden for de rationale tal er det såkaldte “Zenons paradoks.” I en bevægelse mod et mål tilbagelægges først halvvejen, så halvvejen af resten osv. Strækningen deles op i uendeligt mange bidder, så man aldrig når frem! Men en fysiker vil måske sige, at med jævn hastighed bliver tiden også delt op efter samme recept, så klokken bliver aldrig hel. Altså, vi har blot bemærket formlen

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = 1.$$

I det 19. århundrede tog man sig sammen til at udvide de rationale tal til de reelle tal på en måde, så disse fyldte alle hullerne mellem hine på tallinien. Enten ved at definere uendelige decimalbrøker eller ved Dedekinds snit, der definerer et reelt tal ved mængden af rationale tal, der er større. Altså er der tale om en nedad begrænset ikke tom delmængde, A, af de rationale tal:

$$\emptyset \neq A \subset \mathbb{Q}$$

med egenskaben, at

$$\forall a \in A : [a, \infty[\subseteq A,$$

altså, for hvert $a \in A$ er halvlinien $[a, \infty[\subseteq A$, eller

$$\forall a \in A \forall r \in \mathbb{Q} : r > a \Rightarrow r \in A,$$

altså, hvis $a \in A$ og r er et rationalt tal, der er større end a, så er $r \in A$. Ved halvlinien $[a, \infty[$ forstås mængden af rationale tal, der er $\geq a$, altså $[a, \infty[= \{x \in \mathbb{Q} | x \geq a\}$. De to definitioner er ensbetydende.

Fx defineres $\sqrt{2}$ som

$$\sqrt{2} = \{x \in \mathbb{Q} | x > 0 \wedge x^2 > 2\}.$$

Georg Cantor gør nu den interessante iagttagelse, at hvad enten man bruger uendelige decimalbrøker eller de ovenfor præciserede “snit” får man identiske mængder af reelle tal, dvs. enhver af disse er ækvivalente. Cantor bemærkede desuden, at der er flere reelle tal end rationale! Uendelige størrelser er ikke nødvendigvis lige store. Vi definerer ’ligestorhed’ på samme måde, som vi indser, at der er lige mange fingre på vore to hænder, nemlig ved at der eksisterer en korrespondance mellem dem. Altså, A og B er lige store, hvis vi kan finde en bijektiv funktion

$$f : A \to B,$$

dvs.

$$x \neq y \in A \Rightarrow f(x) \neq f(y)$$

og

$$\forall b \in B \exists a \in A : f(a) = b.$$

Hvis vi nu har en funktion fra de naturlige tal ind i de reelle tal, altså en følge af reelle tal, og disse, $r_1, r_2, ..., r_n, ...$ skrives som decimalbrøker,

$$r_n = r_n^h, r_{n1} r_{n2} ... r_{nm} ...,$$

[1] Frit efter Georg Brandes, der skrev en artikel i Illustreret Tidende den 26. september 1869 med titlen “Om det uendeligt smaa og det uendeligt store i Litteraturen”. Den var et gennembrud i litteraturkritikken.

[2] Pythagoras handler om arealer. At der findes heltallige løsninger til ligningen $x^2 + y^2 = z^2$ er et mirakel, jvf. Fermats sætning, at erstattes tallet 2 med et større heltal, så er der ingen heltallige løsninger (med mindre ét af tallene er 0).

med $r_n^h \in \mathbb{Z}$ og $r_{nj} \in \{0, 1, ..., 9\}$, så vil et tal $s = 0, s_1 s_2 s_3 ..$ med egenskaben $r_{jj} \neq s_j \in \{0, 1, ..., 9\}$ ikke være med i følgen. Dette kaldes Cantors diagonalargument. Vi slutter heraf, at allerede Dedekinds delmængder af $\mathbb{Q}$ er flere end $\mathbb{Q}$ selv, idet det er let at se, at $\mathbb{Q}$ kan udtømmes af en passende følge. (Brøkerne $\frac{p}{q}$ med $|p| + |q| \leq n$ er endeligt mange.)

Men værre endnu! Cantor indså, at det er et generelt fænomen i mængdelæren, at der er flere delmængder af en mængde, end der er elementer i den. Det gælder i det små: Den tomme mængde har én delmængde, nemlig sig selv, men ingen elementer! Og en mængde med n elementer har 2^n delmængder, og $n < 2^n$ for alle $n \in \mathbb{N}$.

Det generelle argument er egentlig enkelt: Det er klart, at umiddelbart er der flere delmængder end elementer, husk blot på delmængderne af formen $\{x\}$. Hvis der er lige mange delmængder og elementer, må der findes en korrespondance mellem dem, altså en funktion fra mængden A til mængden $D(A)$ af dens delmængder, $f : A \to D(A)$, så enhver delmængde bliver billede af et element i A. Men definerer vi delmængden

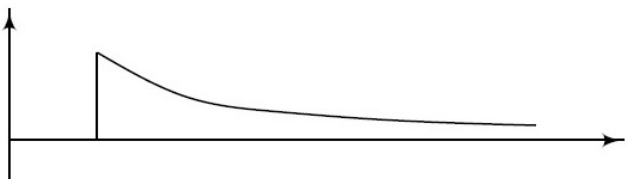
$$B = \{x \in A | x \notin f(x)\},$$

så er spørgsmålet, om vi kan finde $b \in A$, så $B = f(b)$. Men er $b \in B$? Hvis $b \in B$, så siger definitionen, at $b \notin f(b) = B$. Og hvis $b \notin B = f(b)$, så siger definitionen jo, at $b \in B$.

Dette argument blev berømt som Russels paradoks, at "mængden af alle mængder" ikke giver mening. Der er heller ikke nogen største mængde.

Det uendelige kræmmerhus

Et spøjst eksempel på et forvirrende fænomen er det uendelige "kræmmerhus" dannet af funktionen $\frac{1}{x}$ på intervallet $[1, \infty[$ ved drejning om x-aksen.



Figur 1. Profilen af et uendeligt kræmmerhus.

For hvert x dannes en cirkel med radius $\frac{1}{x}$. Kræmmerhusets rumfang bliver derfor

$$\int_1^\infty \frac{\pi}{x^2} dx = \pi.$$

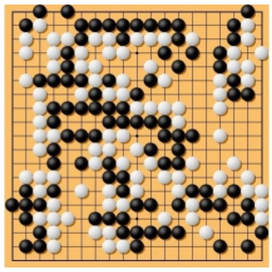
Men overfladen bliver jo

$$\int_1^\infty \frac{2\pi}{x} dx = \infty.$$

Som en fysiker vil sige: Vi kan fylde det med maling, men vi kan ikke male det!

Spil

Nu stødte Dedekinds definition John Conway i 1970'erne ved at være i to trin, først $\mathbb{Q}$, så $\mathbb{R}$. Samtidig var Conway optaget af at generalisere spils additive struktur fra upartiske spil til partisanspil. Et spil kaldes "upartisk," hvis de to spillere har de samme træk til rådighed. Det afgørende er altså, hvis tur det er. Et spil, der ikke er upartisk, kaldes et "partisanspil". Conway var især inspireret af formanden for The British Go Association, John Diamond. Deres iagttagelse af go–spillet var, at dette spil på naturlig måde splittes op i en sum af spil ligesom de upartiske spil.



Figur 2. Spillet "Go".

Det typiske upartiske spil er NIM, opfundet og navngivet af C. L. Bouton i 1902. Det er en sum af uhyre enkle spil, nemlig bunker af tændstikker med spillereglen, at den spiller, der har tur, fjerner et antal på mindst én tændstik. Vinderen er spilleren, der fjerner den sidste tændstik. Er der kun 1 bunke, vinder han let ved at fjerne hele bunken. Men allerede ved 2 bunker, er situationen anderledes. Er de lige store, har den anden spiller den vinderstrategi at kopiere første spillers træk i den urørte bunke. Er de ikke lige store, vinder første spiller ved at gøre dem lige store. Er der 3 eller flere bunker, kompliceres situationen betydeligt.

Det viser sig, at alle upartiske spil er ækvivalente med NIM.

Spil og talmængder

Partisanspil er spil med fuld information, hvor spillerne har hver sine muligheder. Typiske eksempler er skak, dam og go, hvori spillerne opererer med hver sine brikker. Netop spillet go, der har som mål at afgrænse det største areal på spillebrættet, reduceres i slutspillet til spredte grænsefægtninger rundt om på brættet. Derved opstår den naturlige sum af spil: Spilleren vælger, i hvilken konflikt han vil sætte ind og så hvordan.

Conway ønsker at starte fra bunden og definere spil, naturlige tal, rationale tal og reelle tal med samme opskrift. Mens Dedekind har én opskrift på de rationale tal og derefter en helt anden på de reelle tal, definerer Conway spil rekursivt som følger. Der er to spillere, V (venstre) og H (højre). De har hver sine muligheder, der alle er allerede definerede spil. Svarende til en stilling på go–brættet, hvor den ene spiller kan besætte et tomt felt med en sort sten, den anden et tomt felt med en hvid sten.

Vi har fra starten kun et spil, som vi kan skrive $\{\emptyset | \emptyset\}$, altså spillet, hvor ingen af spillerne har noget træk til rådighed. Vi betegner dette spil som 0, og forstår det som det spil, hvor den spiller, der er i trækket, har tabt. Nu kan vi definere tre nye spil: $\{0|\text{Ø}\}$, $\{\text{Ø}|0\}$, $\{0|0\}$, idet vi skriver 0 for $\{0\}$. Her er de to første partisanspil, mens det sidste er upartisk. Spillet $\{0|\text{Ø}\}$ er altid vundet for V. Er det hans tur, vælger han spillet 0, der ikke giver H noget træk, så H har tabt. Er det H's tur, har han intet træk og har derfor tabt. Vi betegner dem som hhv $\{0|\text{Ø}\} = 1$ og $\{\text{Ø}|0\} = -1$. Disse spil er tillige eksempler på tal. Tallene er spil, hvor alle mulighederne for begge spillerne tillige er tal, og hvor intet tal, der er til højre, er $\leq$ noget tal til venstre. Spillet $\{0|0\}$ er derfor ikke noget tal, men et meget simpelt upartisk spil, der betegnes med * og er vundet for den spiller, der er i trækket.

Bemærk, at bunken med 1 tændstik i NIM er et eksempel på spillet *.

Med denne start opbygger Conway spil og blandt dem tal, der snart viser sig at omfatte alle kendte tal og en mangfoldighed af hidtil ukendte størrelser.

Også i almindelighed betyder summen af flere spil, at spilleren i tur vælger et af spillene at trække i og så efterlader summen af det heri valgte spil og de urørte spil. Dvs. at efter at spiller 1 har trukket et eller andet sted, så kan spiller 2 vælge at svare i samme spil eller at spille i et af de urørte spil i summen af spil. Som man i Go-spillet vælger et hjørne af brættet at trække i.

Betragt nu spillet

$$S = \{0|1\} + \{0|1\} + \{\text{Ø}|0\}.$$

Nu kan V trække til

$$0 + \{0|1\} + \{\text{Ø}|0\},$$

som H trækker til

$$\{0|\text{Ø}\} + \{\text{Ø}|0\},$$

som V trækker til

$$0 + \{\text{Ø}|0\},$$

som H trækker til 0, og V har tabt.

Og H trækker til

$$\{0|\text{Ø}\} + \{0|1\} + \{\text{Ø}|0\},$$

som V trækker til

$$\{0|\text{Ø}\} + 0 + \{\text{Ø}|0\},$$

som H trækker til

$$\{0|\text{Ø}\},$$

som V trækker til 0, og H har tabt.

Med andre ord, $S = 0$, og derfor er

$$\{0|1\} = \frac{1}{2}.$$

Ethvert spil, som tabes af den, der har tur, regnes for 0. Spillene har en partiel ordning defineret ved, at spil, der altid kan vindes af V, er positive. Rekursivt defineres

$$-\{x|y\} = \{-y|-x\},$$

fx

$$-\{0|\text{Ø}\} = \{\text{Ø}|0\}.$$

Ordningen defineres derfor som sædvanlig

$$x > y \quad \Leftrightarrow \quad x - y > 0.$$

Hvis hverken $x - y > 0$ eller $y - x > 0$, så er der to muligheder: $x - y = 0$ og $x - y = *$. Med andre ord, at $x - y$ tabes af første spiller hhv. vindes af første spiller. Vi skriver hhv. $x = y$ og $x||y$. Fx $0||*$. Alle NIM-bunker undtagen den tomme er $||0$, mens jo $\text{Ø} = 0$.

Tallene er simpelthen de ordnede spil, og vi har set starten på de rationale med en potens af 2 i nævneren.

Fx sætter vi $\omega = \{0, 1, 2, ...|\}$ og finder fx $\omega + 1 = \{0, 1, 2, ...|0\}$. Conway definerer også produkt og kvotient, hvorved hans udvidede talmængde bliver et legeme. Dette indeholder explicitte infinitesimaler, fx $\frac{1}{\omega} = \{|1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, ...\}$.

Spillet $\uparrow = \{0|*\}$ opfylder $0 < \uparrow < 2^{-n}$ for alle n, den simpleste positive infinitesimal. Man regner med dem, så fx er $\{0|\uparrow\} = \uparrow + \uparrow + *$, og $\{\uparrow | \uparrow\} = \{0|\uparrow\}$.

Et endnu mindre positivt spil er

$$+_n = \{0|\{0| - n\}\} \text{ for } n > 0.$$

Conways spil omfatter tallene som den ordnede delmængde, der omfatter de sædvanlige reelle tal, men udgør et langt mere omfattende legeme – kaldet de "surreelle tal" – med uanede mængder af uendeligt små og uendeligt store størrelser.

Litteratur

[1] Michael H. Albert, Richard J. Nowakowski, David Wolfe (2007), Lessons in Play, A.K. Peters, Natick 2007

[2] Elwyn R. Berlekamp, John H. Conway, Richard K. Guy (1985), Winning Ways for your mathematical plays (2 Vol.), Academic Press, London 1985.

[3] Jörg Bewersdorff (2005), Luck, Logic, and White Lies, A.K. Peters, Natick 2005.

[4] Charles L. Bouton (1901-02), Nim a game with a complete mathematical theory, *Ann. of Math.* **(2)**3, 1901–02, s. 35-39.

[5] John H. Conway (1976), On Numbers and Games, Academic Press, New York 1976.

[6] John H. Conway (1996), Richard K. Guy, The Book of Numbers, Copernicus, New York.

[7] John H. Conway (2001), On Numbers And Games, A.K. Peters, Natick.

[8] H.–D. Ebbinghaus, H. Hermes, F. Hirzebruch, M. Koecher, K. Mainzer, J. Neukirch, A. Prestel, R. Remmert (1995), Numbers, Springer, New York.

[9] Richard K. Guy (1989), fair game, Comap Mathematical Exploration Series, Arlington, Mass.

[10] Donald E Knuth (1974), Surreal Numbers, Addison–Wesley, Reading, Mass.

Mogens Esrom Larsen er lektor emeritus i matematik på Københavns Universitet og redaktør ved Kvant siden starten.