Rulning – breddeopgave 41 med didaktisk kommentar

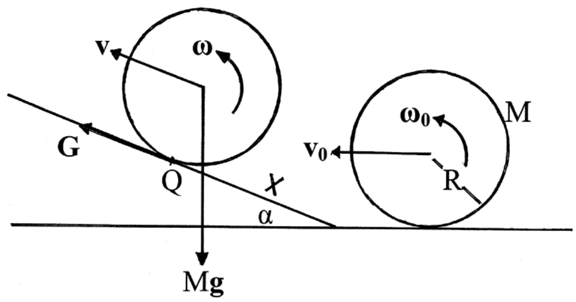
Af Jens Højgaard Jensen, IMFUFA, NSM, RUC

Mit formål med artikelserien om breddeopgaver er – udover at gøre opmærksom på RUCs fysikuddannelse – dobbelt: Dels udvælger jeg opgaverne, så de kan have interesse som fysikproblemer i egen ret. Dels udvælger jeg dem med henblik på at kunne knytte didaktiske overvejelser til dem af interesse for fysikundervisere. I første omgang i forhold til universitetsundervisning. Men i anden omgang kunne der måske også trækkes paralleller til andre undervisningsniveauer.

Her bringes løsning og kommentar til opgaven fra forrige nummer samt en ny opgave. Opgaven i sidste nummer af KVANT var denne breddeopgave fra RUC (nr. 41 i rækken her i KVANT):

Breddeopgave 41. Rulning

En hul og en massiv cylinder med ens masser og ens radier ruller med samme fart hen imod et skråplan. Hvad er forholdet imellem, hvor langt de ruller op ad skråplanet? Begrund svaret.



Figur 1. Tværsnit af cylinder, der ruller op ad et skråplan.

Løsning

Opgaven kan løses på tre kvalitativt forskellige måder:

1. Den mest direkte måde er ved brug af *mekanisk energibevarelse*. Da den kinetiske energi af cylinderen før den ruller op ad skråplanet er lig med dens potentielle energitilvækst i topstillingen, fås med betegnelserne på figur 1, idet I_{CM} (inertimomentet om cylinderaksen) skrives som kMR^2 og $v_0 = R\omega_0$ ved ren rulning:

$$\frac{1}{2}Mv_0^2 + \frac{1}{2}I_{\mathrm{CM}}\omega_0^2 = \frac{1}{2}(1+k)Mv_0^2 = Mgx_{\mathrm{top}}\sin\alpha, \tag{1}$$

hvoraf

$$x_{\mathrm{top}} = \frac{(1+k)v_0^2}{2g\sin\alpha} \tag{2}$$

Da $k = 1$ for den hule cylinder og $k = \frac{1}{2}$ for den massive cylinder, er svaret på opgaven derfor:

$$\frac{x_{\mathrm{top,hul}}}{x_{\mathrm{top,massiv}}} = \frac{1+1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{4}{3} \tag{3}$$

2. Opgaven kan også besvares ved brug af *tyngdepunktssætningen og momentsætningen om tyngdepunktet*. Med betegnelserne på figur 1 fås:

$$M\frac{dv}{dt} = -Mg\sin\alpha + G \quad \text{og} \quad I_{\mathrm{CM}}\frac{d\omega}{dt} = -RG \tag{4}$$

Indsættes G isoleret fra den anden ligning i den første samtidig med, at I_{CM} sættes lig med kMR^2 og $v = R\omega$, fås heraf, at cylindrenes bevægelse er bestemt ved:

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{g\sin\alpha}{1+k} \tag{5}$$

Integrationen af (5) en og to gange giver så:

$$v(t) = -\frac{g\sin\alpha}{1+k}t + v_0 \tag{6}$$

og

$$x(t) = -\frac{1}{2}\frac{g\sin\alpha}{1+k}t^2 + v_0t \tag{7}$$

Og indsættes t for $v(t) = 0$ fra den første ligning i den anden, fås x_{top} som i ligning (2) og derved svaret på opgaven som i ligning (3). Denne måde at besvare opgaven på er besværligere end ved brug af energibevarelse. Til gengæld muliggør den som vist, at tidsforløbene kan undersøges. Og at størrelsen af den statiske gnidningskraft G kan findes ved indsættelse af (5) i momentsætningen under brug af $Rd\omega/dt = dv/dt$.

3. Den tredje måde at besvare opgaven på er ved at bruge *momentsætningen om røringspunktet* mellem cylinder og skråplan:

$$I_{\mathrm{Q}}\frac{d\omega}{dt} = -MgR\sin\alpha \tag{8}$$

Idet $I_{\mathrm{Q}} = MR^2 + I_{\mathrm{CM}} = (1+k)MR^2$ og $Rd\omega/dt = dv/dt$ kommer vi herved direkte frem til ligning (5) uden at have G som ubekendt variabel i første omgang. Hvorefter løsningen er som ved metode 2.

Kommentar

Opgaven eller tæt beslægtede opgaver er almindeligt forekommende i lærebøgerne i mekanik på universitetsniveau. Som tidligere nævnt i artikelserien om breddeopgaver må lærebøger ikke medtages til eksamen. Derfor er det også muligt at stille lærebogsklassikere som denne som opgaver til eksamen.

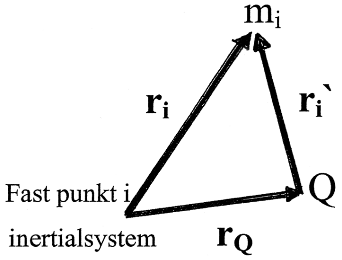
Min gennemgåede 3-foldige løsning af opgaven er også en lærebogsklassiker. Jeg husker den fra min egen universitetsundervisning. Og jeg har f.eks. genfundet den i Berkeley Physics Course, Volume 1, Second Edition, 1973, p. 249-252, og i Ohanian: Physics, Second Edition, 1989, p. 339-343. Ikke desto mindre bygger den tredje af løsningsmetoderne på et forkert udgangspunkt, hvilket er min grund til at skrive artiklen her om opgaven.

Retfærdiggørelsen af at bruge momentsætningen om røringspunktet, som gjort ved den tredje måde at løse opgaven på, er ifølge Berkeley Physics Course:

"The acceleration in the motion of the rolling object is calculated by recognizing that *instantaneously* the motion is simply a rotation about a point on the periphery of the object. Thus we shall require the moment of force about P to equal the rate of change of angular momentum about P." (P er røringspunktet), og ifølge Ohanian:

"The existence of an instantaneous fixed axis in rolling motion (without slipping) enables us to deal with this motion by methods developed in the preceding sections. The rotation about the instantaneous fixed axis obeys our old equation $Id\omega/dt = \tau_z$. From this, we can calculate the motion of a rolling body on which external forces and torques act." (z refererer til en stillestående z-akse).

Men denne retfærdiggørelse er en slags tanketorsk. Det er rigtigt, at en rent rullende genstands bevægelse momentant kan beskrives som en rotation om det faste underlagspunkt, der rører den rullende genstand. Men røringspunktet er noget andet end dette faste punkt. Røringspunktet er et geometrisk bestemt punkt, der flytter sig. Hvorfor man ikke umiddelbart kan tillade sig at anvende momentsætningen om røringspunktet som gjort.



Figur 2. Stedvektorer i tilknytning til et vilkårligt bevæget punkt Q.

Den størrelse, der opereres med ved den tredje udregning, impulsmomentet om punktet Q, er alment defineret som følgende vektor:

$$\boldsymbol{L}_\mathrm{Q} = \Sigma_i \boldsymbol{r}_i' \times m_i \boldsymbol{v}_i = \Sigma_i (\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_\mathbf{Q}) \times m_i \boldsymbol{v}_i, \qquad (9)$$

med figur 2's betegnelser og med Q som et vilkårligt bevæget punkt. Differentieres det sidste udtryk for $\boldsymbol{L}_\mathrm{Q}$, fås:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\boldsymbol{L}_\mathrm{Q} &= \Sigma_i \boldsymbol{v}_i \times m_i \boldsymbol{v}_i - \Sigma_i \boldsymbol{v}_\mathbf{Q} \times m_i \boldsymbol{v}_i \\ &\quad + \Sigma_i (\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_\mathbf{Q}) \times m_i \frac{d\boldsymbol{v}_i}{dt}. \qquad (10) \end{aligned}$$

Her er første led 0. Andet led er lig med $M\boldsymbol{v}_\mathbf{CM} \times \boldsymbol{v}_\mathbf{Q}$, hvor M er den samlede masse og $\boldsymbol{v}_\mathbf{CM}$ er tyngdepunktets hastighed. Medens tredje led er lig med $\boldsymbol{\tau}_\mathbf{Q}$, kraftmomentet omkring Q fra alle de systemeksterne kræfter, idet $m_i d\boldsymbol{v}_i/dt$ ifølge Newtons anden lov er lig med summen af eksterne og interne kræfter virkende på systempartikel i, og fordi krafmomentbidragene fra de systeminterne kræfter ophæver hinanden ved summationen som følge af loven om aktion og reaktion (idet kræfterne mellem to systempartikler forudsættes at være rettet langs deres forbindelseslinie). Ændringen af impulsmomentet om et vilkårligt bevæget punkt, og hermed om røringspunktet ved rulning, er således ikke alment lig med det samlede kraftmoment om punktet, men derimod givet ved:

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{L}_\mathrm{Q} = \boldsymbol{\tau}_\mathbf{Q} + M\boldsymbol{v}_\mathbf{CM} \times \boldsymbol{v}_\mathbf{Q}. \qquad (11)$$

Momentsætningen brugt omkring røringspunktet som gjort i Berkeley Physics Course, af Ohanian og i min ovenstående løsning, burde altså retfærdiggøres ved ligning (11) sammenholdt med begrundelsen for at $M\boldsymbol{v}_\mathbf{CM} \times \boldsymbol{v}_\mathbf{Q}$ er nul i det specialtilfælde, der er under behandling. Nemlig at $M\boldsymbol{v}_\mathbf{CM}$ og $\boldsymbol{v}_\mathbf{Q}$ er parallelle. Og ikke ved en misforstået henvisning til, at røringspunktet er et momentant fast punkt.

Når misforståelsen har kunnet finde udbredelse er det naturligvis, fordi den har ført til det rigtige resultat i de situationer, der er regnet på. Altså situationer, hvor det ekstra led er nul. Det ekstra led vil være ulig nul, hvis det der ruller f.eks. er et æg på højkant, dvs. noget ikke omdrejningssymmetrisk, eller hvis der f.eks. rulles ned gennem Rundetårn, dvs. på en skruet plan. Da jeg ikke kan forestille mig, at der ikke har været regnet på sådanne fænomener, kan jeg heller ikke forestille mig, at der ikke findes speciallitteratur, hvor ligning (11) er alment erkendt. I fysiklærebogslitteraturen har jeg imidlertid kun været i stand til at finde ligningen følgende to steder: Jacob Nielsen: Rationel Mekanik II, 3. udgave, 1952. p. 148, og J.M.Knudsen og P.G.Hjorth: Elements of Newtonian Mechanics, 3. Edition, 2000, p. 257. Altså pudsigt nok en rent dansk sag.

I Jens Martin Knudsens eksempelsamling fra 1968 til Fysik 1 på Københavns Universitet, som jeg har stående som duplikerede noter på reolen, fordi jeg var studenterinstruktor på kurset, ser jeg under skrivningen af artiklen her på side 274-275, at den fejlagtige tredje metode er anført og derefter overstreget før trykningen.

De fleste lærebøger, der omhandler momentsætningen og anvender den på rulning, nøjes med at udlede momentsætningen i specialtilfældet, hvor Q er et fast punkt og $\boldsymbol{v}_\mathbf{Q}$ altså nul, og specialtilfældet, hvor Q er CM og $M\boldsymbol{v}_\mathbf{CM} \times \boldsymbol{v}_\mathbf{Q}$ derfor også altid er nul, og nøjes i forlængelse heraf med de to første besvarelser af rulleopgaven. De fleste lærebøger holder sig altså borte fra den forkert begrundede tredje måde at løse opgaven på.

I flere af de mere avancerede mekaniklærebøger findes en anden generel ligning end ligning (11) udledt.

Til forskel fra ligning (9) er $\boldsymbol{L}_{\mathbf{Q}}$ her defineret ved:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{L}_{\mathrm{Q}} &= \Sigma_i \boldsymbol{r}_i' \times m_i \boldsymbol{v}_i' \\ &= \Sigma_i (\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_{\mathbf{Q}}) \times m_i (\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}_{\mathbf{Q}}), \qquad (12)\end{aligned}$$

altså impulsmomentet om Q i et system, der følger med Q. Mens der i ligning (9) er tale om impulsmomentet i laboratoriesystemet, men taget om et punkt der flytter sig.

Ved differentiation af (12) fås med denne betydning af $\boldsymbol{L}_{\mathbf{Q}}$:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\boldsymbol{L}_{\mathrm{Q}} &= \Sigma_i (\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}_{\mathbf{Q}}) \times m_i (\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}_{\mathbf{Q}}) \\ &\quad + \Sigma_i (\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_{\mathbf{Q}}) \times m_i \frac{d\boldsymbol{v}_i}{dt} \\ &\quad - \Sigma_i (\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_{\mathbf{Q}}) \times m_i \frac{d\boldsymbol{v}_{\mathrm{Q}}}{dt}. \qquad (13)\end{aligned}$$

Her er første led nul og andet led lig med $\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{Q}}$ som ovenfor. Da $\Sigma_i \boldsymbol{r}_i \times m_i \frac{d\boldsymbol{v}_{\mathrm{Q}}}{dt} = \boldsymbol{r}_{\mathrm{CM}} \times M \frac{d\boldsymbol{v}_{\mathrm{Q}}}{dt}$ og $\Sigma_i \boldsymbol{r}_{\mathrm{Q}} \times m_i \frac{d\boldsymbol{v}_{\mathrm{Q}}}{dt} = \boldsymbol{r}_{\mathrm{Q}} \times M \frac{d\boldsymbol{v}_{\mathrm{Q}}}{dt}$, fås så modsvarende ligning (11):

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{L}_{\mathrm{Q}} = \boldsymbol{\tau}_{\mathrm{Q}} + (\boldsymbol{r}_{\mathrm{CM}} - \boldsymbol{r}_{\mathrm{Q}}) \times (-M \frac{d\boldsymbol{v}_{\mathrm{Q}}}{dt}). \qquad (14)$$

Det ekstra led her i forhold til den simple momentsætning ses at være kraftmomentet omkring Q fra det homogene systemkraftfelt, der gør sig gældende i et koordinatsystem, der accelererer sammen med Q. Ligesom det ekstra led i ligning (11) forsvinder leddet – som det skal – altid i de to velkendte specialtilfælde, hvor Q er et fast punkt i et inertialsystem, og hvor Q er CM. Men ellers er det jo ikke det samme, der er tilføjet i ligning (11) og ligning (14).

I forhold til vores rulleproblem kunne ligning (11) bruges til at retfærdiggøre den tredje måde at løse opgaven på, idet det ekstra led indses her at være nul. Ligning (14) tilbyder en fjerde løsningsmetode. Men her kan det ekstra led ikke smides væk. De tre led i ligning (14) anvendt på rulleproblemet får tværtimod ligningen til at have udseendet:

$$kMR^2 \frac{d\omega}{dt} = -RMg \sin\alpha - MR\frac{dv}{dt}. \qquad (15)$$

Idet $R\frac{d\omega}{dt} = \frac{dv}{dt}$, ses ligningen som ved løsningsmetode 2 og 3 igen at føre til ligning (5).

Rulleopgaven kan altså løses på hele fire kvalitativt forskellige måder. Og heraf forudsætter altså de to af løsningsmetoderne mere end den enkle udgave af momentsætningen, at ændringen af impulsmomentet per tidsenhed er lig med kraftmomentet fra ikke-systemkræfter.

Jeg har uddybet emnet her yderligere i en artikel i European Journal of Physics med titlen "Rules for rolling as a rotation about the instantaneous point of contact" (*Eur. J. Phys.* **32** (2011) 389-397).

Breddeopgave 42 og 43. Vindmøller og helikoptere

Inden næste nummer af KVANT udkommer, kan læserne eventuelt overveje løsningerne til disse to opgaver fra breddekurset på RUC (fra den indledende samling træningsopgaver fra starten af kurset i 1976, nr. 42 i rækken her i KVANT, og fra sommereksamen 2010, nr. 43 i rækken her i KVANT):

Giv en øvre grænse for effekten af en vindmølle. Begrund svaret.

Hvilken effekt skal motoren i en helikopter yde for at holde helikopteren svævende? Begrund svaret.

Løsninger og kommentarer bringes i et kommende nummer.

Foreningsnyt – foredrag i foråret

Foredragskalender

Dato	Tid	Foredragstitel	Foredragsholder	Forening
Apr.				
11/4	19.00	Astronomi i rumalderen	*Niels Lund*	AS (Århus)
12/4	17.15	Kold Krig og slaget om komplementariteten: Rosenfeld og Bohr	*Anja S. Jacobsen*	VHS
Maj				
2/5	19.15	Exoplaneter og liv i Universet	*Anja C. Andersen*	AS (Kbh)
9/5	19.00	Exoplaneter og liv i Universet	*Anja C. Andersen*	AS (Århus)
9/5	19.30	Modeller af liv	*Kim Sneppen*	SNU

AS (Kbh): Astron. Selskab (København), Aud. 4, H.C. Ørsted Inst., Universitetsparken 5, 2100 Kbh. Ø (www.astronomisk.dk).
AS (Århus): Astron. Selskab (Århus), Matematisk Inst., Aarhus Universitet, Ny Munkegade, Bygn. 1530, Aud. D2, 8000 Århus C.
SNU: Geologisk Museum, Øster Voldgade 5-7, 1350 København K (www.naturvidenskab.net).
VHS: Videnskabshist. Selskab, H.C. Ørsted Inst., aud. 10, Universitetsparken 5, 2100 Kbh Ø (www.math.ku.dk/videnskabshistorie).