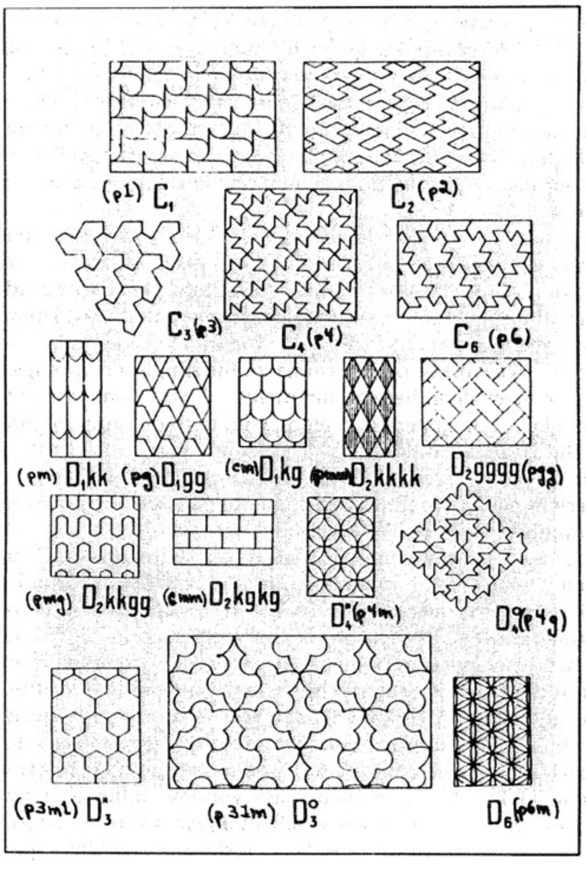
# Eschers tapeter

*Af Mogens Esrom Larsen, KVANT*

Maurice Cornelius Escher (17.6.1898-27.3.1972) er vidt bekendt for sine utallige grafiske arbejder; men vi skal kun interessere os for hans tapetmønstre, dvs. mønstre, der er ens bane efter bane, eller om man vil, går over i sig selv ved bestemte forskydninger.

I geometri er kongruens et fundamentalt begreb. To figurer kaldes kongruente, når den ene kan bringes til dække den anden nøjagtigt ved en afstandsbevarende afbildning, fx forskydning, drejning eller spejling, gerne flere af disse efter hinanden.

En figur kan også være symmetrisk, nemlig hvis den kan bringes til at dække sig selv ved en sådan afbildning, der ikke lige er identiteten. Fx en ligebenet trekant ved spejling i den ene højde eller en ligesidet trekant drejet 120° om sit centrum osv. Et tapetmønster som fx en ternet blok tænkt udvidet i det uendelige kan desuden forskydes over i sig selv, fx vandret eller lodret i en terns sidelængde.

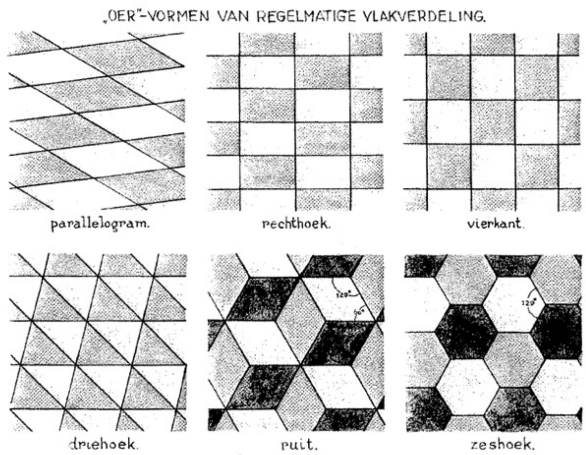



**Figur 1.** Polyas 17 forskellige mønstre, der hver har netop sin symmetrigruppe.

Allerede i 1921 eksperimenterede Escher med mønstre, der havde sådanne forskydningssymmetrier. Samtidig var den ungarske matematiker George Polya (1887-1985) interesseret i mønstre med diverse symmetrier. Men en matematiker interesserer sig typisk for at undersøge, nøjagtig hvilke afbildninger, der fører det enkelte mønster over i sig selv. Hvert enkelt mønster er symmetrisk overfor forskydninger i en eller to og i sidste tilfælde også alle kombinationer af disse to retninger, evt. spejling i en eller flere linier og evt. drejninger om et eller flere punkter med multipla af en mulig mindste drejningsvinkel.

Sjovt nok er det klart, at den mindste vinkel, der kan forekomme, er 60°. Thi ser vi på et muligt omdrejningspunkt og det nærmeste punkt, det kan afbildes i ved en forskydning, og drejer vi nu dette nærmeste punkt en vinkel, der er mindre end 60°, og derefter forskyder dette punkt tilbage igen, kommer vi til et punkt, der er tættere på udgangspunktet end det nærmeste. Ved 60° bliver afstandene nøjagtig ens.

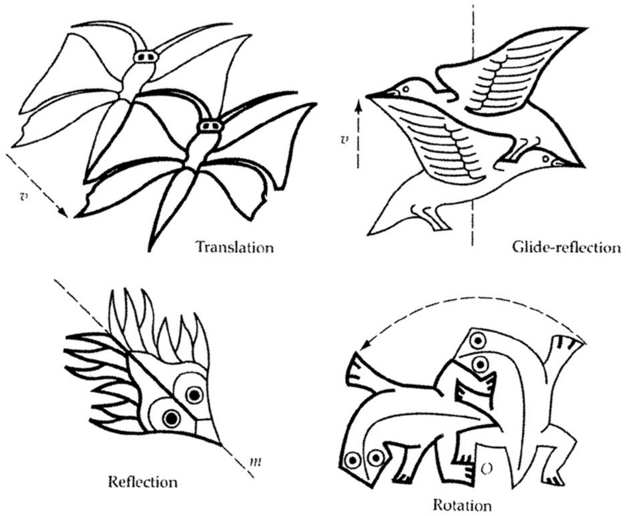
Det er derfor begrænset, hvor mange grupper af afbildninger, der kan forekomme. Polya fandt 17 forskellige i 1924 [3]. I sin afhandling gav han eksempler på 17 forskellige mønstre, der hver havde netop sin symmetrigruppe. Jeg gengiver hans eksempler fra [1]. Det var først i 1937, at Eschers bror, der var geolog, gjorde ham opmærksom på Polyas artikel, som Escher omhyggeligt kopierede i sin notesbog.




**Figur 2.**

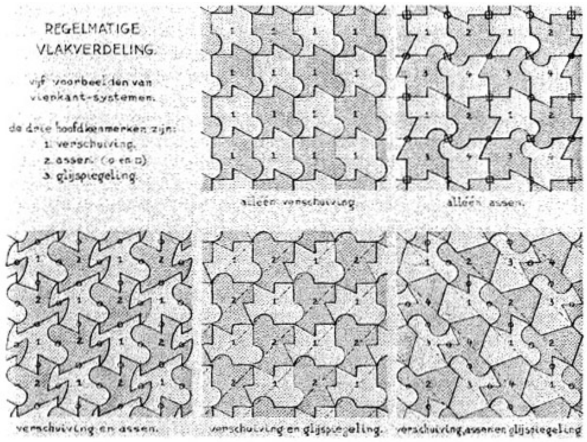
Men Escher var helt ligeglad med de 17 grupper, han ville lave mønstre med to eller tre forskellige figurer, der kunne farvelægges, så naboerne efter forskydningerne altid havde forskellige farver. Naboerne skal have en grænse fælles, ikke kun et punkt. Først gik han frem efter et simpelt grundmønster for forskydning, nemlig et af følgende fem: (De følgende figurer gengives fra [2].)

Efter valget af grundmønster skulle der vælges et motiv, som så skulle transformeres efter fire kongruenstyper, givet ved afbildningernes art.



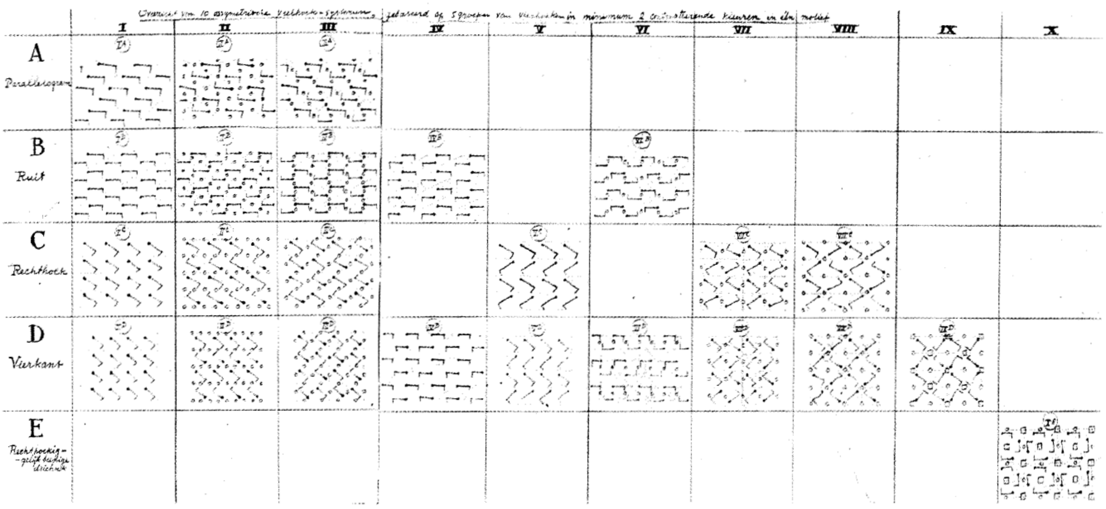

**Figur 3.**

Egentlig er der kun tre, men han fremhæver den sammensatte af de to første, kaldet "glidespejling". Som eksempel giver han fem variationer på et kvadratsystem,




**Figur 4.** Illustration som Escher brugte ca. 1960 i sine forelæsninger til at forklare teorien om regelmæssig opdeling af planen. Eschers titel lyder "Regulær opdeling af planen. Fem eksempler på kvadratsystemer". Til venstre har han noteret "De tre karakteristika er: 1. translation, 2. akser (○ og □), 3. glide-refleksion". Ved de øverste to mønstre er noteret "kun translation" og "kun akser". Ved de nederste mønstre er noteret "translation og akser", "translation og glide-refleksion" og "translation, akser og glide-refleksion".

hvor symbolerne □ og ○ angiver drejninger på hhv. 90° og 180° om det punkt, symbolet markerer. Han giver nu en klassifikation af mulige mønstre, 24 ialt, med to farver, inddelt efter de 5 grundmønstre, A,...,D og de anvendte symmetrier (se figur 5).




*Overview of 10 asymmetric polygon systems, based on 5 groups of quadrilaterals with a minimum of 2 contrasting colors and one motif*

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | | | | | | | | | | |
| Parallelogram | $I^A$ | $II^A$ | $III^A$ | | | | | | | |
| B | | | | | | | | | | |
| Rhombus | $I^B$ | $II^B$ | $III^B$ | $IV^B$ | | $VI^B$ | | | | |
| C | | | | | | | | | | |
| Rectangle | $I^C$ | $II^C$ | $III^C$ | | $V^C$ | | $VII^C$ | $VIII^C$ | | |
| D | | | | | | | | | | |
| Square | $I^D$ | $II^D$ | $III^D$ | $IV^D$ | $V^D$ | $VI^D$ | $VII^D$ | $VIII^D$ | $IX^D$ | |
| E | | | | | | | | | | |
| Isosceles right triangle | | | | | | | | | | $X^E$ |

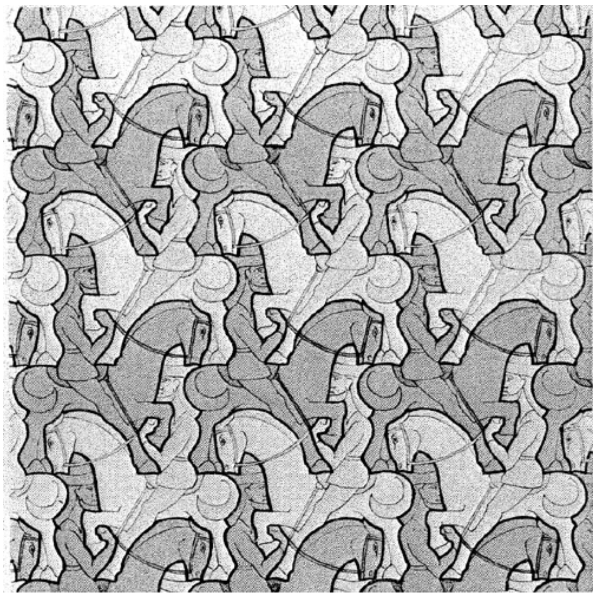
**Figur 5.**

*Characteristics of the 10 systems*

| *system* | [direction of] *translations* | [location of rotation] *axes* | [direction of] *glide-reflections* |
|---|---|---|---|
| I | in both transversal directions and in both diagonal directions | none | none |
| II | in one transversal direction | 4: on the vertices, 2-fold<br>2: in the centers of parallel sides, 2-fold | none |
| III | in both diagonal directions | 4: in the centers of all sides, 2-fold | none |
| IV | in both diagonal directions | none | glide-reflection in both transversal directions |
| V | in one transversal direction | none | glide-reflection in one transversal direction<br>glide-reflection in both diagonal directions |
| VI | in one diagonal direction | 2: in the centers of two adjacent sides; 2-fold | glide-reflection in one diagonal direction<br>glide-reflection in both transversal directions but only in the direction of the sides without rotation point |
| VII | none | 2: in the centers of parallel sides, 2-fold | glide-reflection in one transversal direction<br>glide-reflection in both diagonal directions |
| VIII | none | 4: on the four vertices, 2-fold | glide-reflection in both transversal directions |
| IX | none | 2 4-fold ones on diagonal vertices<br>2 2-fold ones on diagonal vertices | none |
| X | none | 3 4-fold ones on the vertices<br>1 2-fold one in the center of the hypoteneuse | none |

**Figur 6.**

I det følgende vises tre typiske mønstre med angivelse af arten nedenunder.

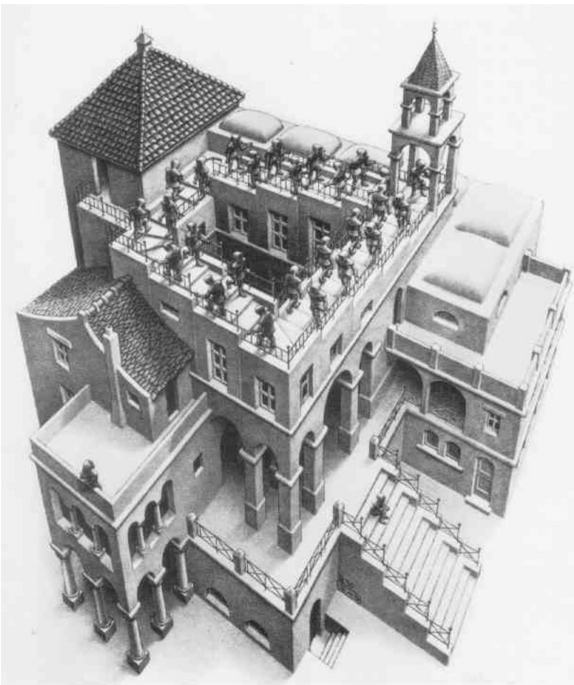


**Figur 7.** System IV$^B$.


**Figur 8.** To eksempler på system I$^A$.

**Figur 9.** System $V^C$.

Han lavede eksempler på alle 24 typer, i alt lavede han mange hundrede tapeter. Jeg vil slutte med at vise et helt andet aspekt, nemlig en af hans tre umulige figurer. Denne her kalder jeg: "Altid op ad bakke og altid lige langt!" En tilværelsens metafor.



**Figur 10.**

**Litteratur**


[1] Martin Golubitsky and Ian Stewart, Fearful Symmetry, Blackwell, Oxford, 1992.

[2] Doris Schattschneider, M. C Escher, W. H. Freeman and Company, New York, 1990.

[3] George Polya, Über die Analogi der Krystallsymmetrie in der Ebene, Zeitschrift für Kristallo- graphie **60** (1924) 278282.



*Mogens Esrom Larsen* er tidligere lektor i matematik på Københavns Universitet og redaktør ved Kvant siden starten.