Den gode stemning[1] I. Om veltemperering af keyboard

Af Jens Ulrik Lefmann, Birkerød Gymnasium og DTU

Fra renæssancen udvikler den europæiske musik sig fra at være udpræget melodisk i sin karakter til at benytte harmoniske virkemidler. Flerstemmighed og treklange med tertser træder ind og afløser middelalderens kvinter og kvarter. Dette går hånd i hånd med indførelse af nye stemninger for keyboardinstrumenter. *Middeltonestemning* afløser *pytagoræisk stemning*, og herved tilgodeses en forskønnelse af durtreklange. Antallet af tonearter og akkorder er dog begrænset til det halve af det, vi råder over i dag. Senere i barokken går man over til *klassiske, veltempererede* stemninger, som tillader brug af alle tonearter. Indbyrdes er disse klassiske tempereringer ret beslægtede. Til gengæld adskiller de sig væsentligt fra den *moderne, ligesvævende* temperering. Anvendelsen af de klassiske tempereringer strækker sig helt frem til omkring år 1900, hvor den moderne, ligesvævende stemning bliver standard. En forståelse af de klassiske tempereringers fælles karaktertræk kan give ny forståelse af den klassiske musiks virkemidler og følelsesmæssige tilknytning til tonearter.

Det er en misforståelse at tro, at man i forbindelse med tilblivelsen af J. S. Bachs Das Wohltemperierte Klavier (WTK) fra 1722 (bind 2 fra 1742) havde indført den moderne, ligesvævende stemning for keyboard. Det er også en udbredt opfattelse, at de stemninger, man anvendte dengang, var ufuldkomne forsøg på at nå frem til at mestre den moderne, ligesvævende stemning. Tværtimod fastholdt man helt op til slutningen af det nittende århundrede klassiske tempereringer ([1], Introduction), som gjorde alle tonearterne *anvendelige*, men *forskellige*. Man møder også den opfattelse, at Bach med WTK1+2 ville vise, at alle 24 tonearter var "lige gode", men tværtimod udstiller værket toneartenes forskelligheder som musikalsk materiale. Kun få kender i dag lyden af de oprindelige tempereringer, men i digitalklaverets tidsalder kan vi igen blot ved at trykke på en knap komme til at lytte os ind i tonearterne, som de fremstod op gennem det 18. og det 19. århundrede. Fx fremstod tonearter med få fortegn særligt *harmoniske*, mens tonearter med mange fortegn var særligt *melodiske*. Hver toneart fik sin helt egen karakter, og komponisters valg af toneart var lige så bevidste som en billedkunstners valg mellem granit, marmor eller bronze. Hvis man ikke har hørt fx Bach, Mozart eller Beethoven fremført med de stemninger, de er skabt i, svarer det til kun at have set fotos af Michelangelos Maria. Eller tro, hun var støbt i hvid akryl i stedet for hugget ud af marmor. I den længere version [2] vises, hvordan Bach netop arbejder med toneartenes forskellighed og hvordan fx Mozart og Beethoven skifter mellem tonearter og bevidst fremkalder farvekontraster, der blegner i vores moderne, ligesvævende stemning ([3], side 73). Musiklivet er i vor tid mere historisk orienteret end nogensinde. Næppe tidligere har musikere specialiseret sig i at spille ældre musik i det omfang, vi kender i dag. Det er uomgængeligt, at man ved fremførelse, fortolkning og oplevelse af ældre musik må forholde sig til tidskløften mellem musikkens tilblivelse og nutiden. Den historiske kikkert kan forvrænge, forstærke, overse eller fremhæve på godt og ondt. Op gennem det tyvende århundrede er den klassiske musik blevet fortolket med tykke, senromantiske briller. Siden har *Early Music* bevægelsen tilbageerobret musikken med sin overbevisende slanke lyd, adrætte tempobehandling og artikulation. Her har ny fremførelsespraksis sammen med klassisk temperering tilmed givet farverne tilbage til den grånende, klassiske musik.

Terminologi

Jeg benytter navnet B for tonen H og B*b* i stedet for B. *Lysere* tone betyder højere frekvens, *mørkere* tone betyder lavere frekvens. Med mindre andet nævnes, bruges ordet *terts* i betydningen durterts eller stor terts, altså fire halvtonetrin (i modsætning til molterts eller lille terts, som er tre halvtonetrin). *Klassisk musik* betegner den europæiske musik fra perioden 1700 - 1900 (fra midt i barokken til senromantik og impressionisme). *Keyboard* anvendes som fællesbetegnelse for alle tasteinstrumenter som clavecin, clavichord, virginal, spinet, cembalo, hammerklaver, harmonium, orgel, klaver, flygel, og digitalklaver. (Ikke mindst som en hyldest til det moderne digitalklaver, der med få klik kan skifte mellem de 7-8 vigtigste historiske stemninger og dermed giver let adgang til at lytte og sammenligne).

Frekvensforhold, stamtone

For to toner er det alene frekvensforholdet $x = f_2/f_1$ som er bestemmende for hvilket interval, vi oplever mellem tonerne. To andre toner med samme frekvensforhold opfattes altså som samme interval. At vores tonesansning fungerer sådan, er i sig selv en kilde til undren, se senere artikel i KVANT eller [2]. Samtidig er det forklaringen på, at man kan høre en melodi i først

[1] Artiklen findes i en mere omfattende udgave på EMU [2]. Forfatteren har holdt en række foredrag om emnet, blandt andet på DTU, RUC og UNF med demonstrationer af klassiske stemninger på digitalklaver. Med en række eksempler fra Bach, Mozart og Beethoven diskuteres komponisternes pointer med valg af toneart. Anden del (II. Høresansens fysik og tonal musikalitet) kommer i et senere nummer af KVANT.

én toneart og derefter i en anden toneart – og alligevel opfatte det som samme melodi! Når en tones frekvens fordobles, sanser vi tonen som oktaven over. Den nye tone opleves så beslægtet med den første, at vi ligefrem giver den samme navn (det dybe C, det høje C etc.). Det er i sig selv et tankevækkende forhold, der tages op senere [2]. To frekvenser f_1 og f_2 kaldes ækvivalente (eller oktavækvivalente), dersom $f_2 = 2^n f_1$ for et passende helt tal n. Vi giver toner samme navn netop hvis deres frekvenser er ækvivalente i denne forstand, fx kalder vi alle toner med frekvenserne 55 Hz, 220 Hz, 440 Hz og 1760 Hz for A. Enhver af disse toner siges at være en repræsentant for stamtonen A, idet vi ved en *stamtone* forstår en klasse af ækvivalente toner.

Den moderne stemning

Vores tonesystem er i dag indrettet sådan, at en oktav er inddelt i 12 lige store trin, kaldet halvtonetrin. Man møder tit spørgsmålet om, hvorfor man har valgt at inddele en oktav i netop 12 trin. Man kunne jo vælge at inddele oktaven i q trin, så hvert trin får en frekvensfaktor $2^{1/q}$. For at opnå en god tilnærmelse til 3/2 (en kvint) med p af sådanne trin, skal $2^{p/q}$ være tæt på 3/2. Med andre ord skal p/q være tæt på $\log(3/2)/\log(2)$. Nu er $p/q = 7/12$ et godt bud; den relative afvigelse er ca. $-2,8 \cdot 10^{-3}$. Man kan prøve med et større tal i nævneren for at se, om man kan komme tættere på med et passende valg af tæller. Det viser sig, at ingen brøker giver bedre tilnærmelse, før man kommer op på $q = 41$. (Se [2] for nærmere diskussion). Først når vi kommer til tallet 24/41, får vi en bedre tilnærmelse til $\log(3/2)/\log(2)$. Den relative afvigelse er nu nede på ca. $-6,9 \cdot 10^{-4}$. Det betyder, at man skal inddele oktaven i 41 trin, og derefter bruge 24 trin som kvinten for at få en bedre tilnærmelse end før. Nu er kædebrøksalgoritmen en særdeles effektiv metode til at beregne den optimale rationale talfølge af *kædebrøkskonvergenter* ([4] s. 20 eller [5], kapitlet "Continued fractions"). Jeg anfører et par af talfølgens elementer (for nærmere forklaring, se [2])

$$\frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{7}{12}, \frac{24}{41}, \frac{31}{53}, \frac{179}{306}, \ldots \to \frac{\log(3/2)}{\log 2} \qquad (1)$$

Heldigvis giver vores valg af 12 trin, at alle toneintervallerne ligger tæt på de klassisk rene intervaller, hvorimod anvendelse af 41 trin kan give os en lidt renere kvint i 24 trin, men til gengæld også et fuldstændig uoverskueligt klaviatur med en lang række meget fremmede intervaller. (En yderligere forbedring fås først, når man vælger at inddele oktaven i 53 trin. Næste skridt er 306 trin – ikke nogen attraktiv vej at gå!)

Oktaven over en tone har frekvensfaktoren 2. Hvis man lader g betegne frekvensfaktoren for ethvert halvtonetrin, får vi ligningen $g^{12} = 2$, som har løsningen $g = 2^{1/12}$. Dette irrationale tal er ikke konstruerbart i euklidisk geometrisk forstand. Beslægtet hermed er det klassiske – uløselige – problem om terningens fordobling; tallet $g^4 = 2^{1/3}$ er netop frekvensfaktoren for en terts. Det har i musikhistorien givet spekulationer over, hvordan man for en lut eller en guitar i praksis skulle anvise en tilnærmet geometrisk konstruktion af gribebrættets inddeling i bånd ([6] s. 49-55). Det klassiske problem om umuligheden af at konstruere sidelængden for en terning med det dobbelte rumfang af en given terning er beskrevet i [7] og [8].

Toneafstand i cent

Man har indført et logaritmisk afstandsmål for toner, sådan at et halvtoneinterval måler 100 cent i den moderne stemning. En moderne terts er 400 cent, en moderne kvint er 700 cent og en oktav er 1200 cent. Afstanden i cent mellem to toner med frekvenser f_1 og f_2 er givet ved formlen

$$I(1,2) = 1200\text{cent} \cdot \log_2(x) = 1200\text{cent} \cdot \frac{\log x}{\log 2} \qquad (2)$$

hvor $x = f_2/f_1$ er frekvensforholdet. Når det drejer sig om stamtoner, kan man regne modulo 1200 cent. Således svarer to kvinter til $700 + 700 = 1400 \equiv 200$ cent, altså en heltone.

Kvintskridt, pytagoræisk komma og syntonisk komma

Den rene kvint over en udgangstone har en frekvensfaktor 3/2. Hvis vi holder os til blot at tale om stamtoner, kan vi lige så godt sige frekvensfaktor 3. Aritmetikkens fundamentalsætning fortæller, at ethvert rationalt tal på entydig måde kan opløses i primfaktorer. Derfor kan en potens af 3 ikke også være en potens af 2, og derfor vil vi aldrig kunne komme tilbage til samme stamtone efter en række rene kvintskridt. Med 12 rene kvintskridt kommer vi imidlertid tæt på, idet 3^{12} er tæt på 2^{19}. Hvis man starter med det dybeste A på klaveret som udgangstone, vil man efter 12 rene kvintskridt nå til en tone med frekvensfaktor $(3/2)^{12} = 129,7$; dette overskrider 7 rene oktaver $2^7 = 128$ med faktoren $(3/2)^{12}/2^7$ svarende til 23,5 cent, det såkaldte *pytagoræiske komma*.

Den rene terts over en udgangstone har frekvensfaktoren 5/4, eller slet og ret 5, hvis vi blot taler om stamtoner. Nu giver fire rene kvintskridt en frekvensfaktor $3^4 = 81$, hvorimod den rene terts har frekvensfaktoren $5 \cdot 2^4 = 80$. Det betyder, at toneintervallet fra den rene terts til den pytagoræiske terts har frekvensforholdet 81/80. Dette interval kaldes det *syntoniske komma*. Det svarer til 21,5 cent og ligger tæt på det pytagoræiske komma.

Den ekstremt lyse durterts i den pytagoræiske skala er hovedårsagen til, at den pytagoræiske skala ikke egner sig til flerstemmig musik, medmindre man holder sig fra tertser.

Middeltonekvinten

I renæssancen kommer det polyfone gennembrud med flerstemmighed og harmoniske virkemidler. Man får derfor smag for den rene terts 5/4, som er væsentligt lavere end den pytagoræiske terts 81/64 ([3] s. 19-45). Man indfører en ny stemning, hvor kvinten formindskes sådan, at fire på hinanden følgende kvinter nu skal give en ren terts. Det fører til ligningen $x^4 = 5$, hvor løsningen $x = 5^{1/4} \approx 1,495$ er frekvensfaktoren for denne nye kvint. Indførelsen af denne irrationale frekvensfaktor er første skridt på vej ned fra antikkens guddommelige idealer (de rationale brøker) for med irrationale tal at tilgodese menneskets sanseverden. Se boks 1.

Boks 1.

Middeltonekvint $5^{1/4} \approx 1,495$:
$I(C, G) = 1200 \text{ cent} \cdot \log_2(5^{1/4}) \approx 697 \text{ cent}$

Moderne kvint $2^{7/12} \approx 1,498$:
$I(C, G) = 1200 \text{ cent} \cdot \log_2(2^{7/12}) = 700 \text{ cent}$

Pytagoræisk, **ren** kvint 3/2:
$I(C, G) = 1200 \text{ cent} \cdot \log_2(3/2) \approx 702 \text{ cent}$

Afvigelserne mellem kvinterne holder sig beskedent inden for 5 cent. Selv et musikalsk trænet øre affinder sig fint med den lave middeltonekvint i bytte for den rene terts i en durtreklang.

Kvinterne afviger i sig selv ikke så meget, men til gengæld bliver der store afvigelser for tertserne, idet en terts jo er fire på hinanden følgende kvinter. Se boks 2. Fra Frederiksborg Slotskirke sælges CD'er med musik spillet på Compeniusorglet fra 1610, som er stemt i middeltonestemning (oprindeligt et verdsligt kammerorgel til dansemusik).

Boks 2.

Middeltone **ren** terts $5/4 = 1,25$:
$I(C, E) = 1200 \text{ cent} \cdot \log_2(5/4) \approx 386 \text{ cent}$

Moderne terts $2^{4/12} = \sqrt[3]{2} \approx 1,260$:
$I(C, E) = 1200 \text{ cent} \cdot \log_2(2^{4/12}) = 400 \text{ cent}$

Pytagoræisk terts $81/64 \approx 1,266$:
$I(C, E) = 1200 \text{ cent} \cdot \log_2(81/64) \approx 408 \text{ cent}$

Mellem tertserne ser man altså langt større afvigelser, nemlig 21,5 cent (det syntoniske komma). Bemærk, hvor lav den rene terts er i forhold til den moderne terts!

Det er almindelig kendt, at musikere med baggrund i andre musiktraditioner tager afstand fra vores tonale system. Fx arbejder indiske musikere i langt højere grad med mikrotonalitet og rene intervaller. Tilvænning fra barnsben er nok den bedste vej til at acceptere den vestlige verdens moderne terts.

Den kromatiske cirkel

Vi kan få bedre overblik ved at placere tonerne i den kromatiske skala C, C#, D, E*b*, E,... osv. på enhedscirklen, idet vi starter med C i (1,0) og går mod uret (figur 1 til højre). Vi lader en hel omgang svare til 1200 cent, og derfor svarer en halvtone på 100 cent til 30 grader. I den moderne stemning danner tonerne en regulær 12-kant. En tone med frekvensfaktor x (i forhold til C) vil altså afbildes i et punkt med retningsvinklen $\theta(x) = 360 \cdot \log_2(x)$ (figur 1 til højre).

Bemærk, at $2x$ afbildes i samme retningspunkt som x idet $\theta(2x) = \theta(x) + 360$. To toner afbildes i samme punkt, netop hvis de repræsenterer den samme stamtone. Nu ser vi på, hvordan en uendelig bane af toner a^n (n heltallig som før) placerer sig på cirklen. Vinklen mellem et punkt og det næste er $360 \cdot \log_2(a)$.

Hvis der forekommer gentagelser, altså hvis a^n og a^m (m ligeledes et helt tal) afbildes i samme punkt, så må $a^n = a^m 2^k$ for et passende helt tal k. Det giver os $a = 2^{k/(n-m)}$ og dermed ser vi, at $\log_2(a) = k/(n-m)$ er et rationalt tal. Hvis omvendt $\log_2(a) = p/q$ er et *rationalt* tal, altså $a = 2^{p/q}$, vil banen netop bestå af q forskellige punkter, der danner en regulær q-kant på cirklen (idet vi antager brøken p/q uforkortelig).

Anderledes er det, hvis $\log_2(a)$ er *irrational*. I så fald vil alle banens punkter være forskellige. Disse uendelig mange punkter vil fordele sig tæt i den kromatiske cirkel, i den forstand at ethvert nok så lille buestykke vil indeholde uendelig mange af banens punkter. Et vigtigt "irrationalt" eksempel er sekvensen af pytagoræiske kvinter. Tallet $\log_2(3/2)$ er irrationalt; hvis man nemlig antog $\log_2(3/2) = p/q$, ville man få $3/2 = 2^{p/q}$, eller $3^q = 2^{p+q}$ i modstrid med aritmetikkens fundamentalsætning. Derfor ligger de pytagoræiske kvinter tæt, og vi kommer aldrig tilbage til samme stamtone. Et andet vigtigt eksempel er sekvensen af middeltonekvinter, som også vil ligge tæt, idet også $\log_2(5^{1/4})$ er et irrationalt tal (hvilket ses på tilsvarende måde).

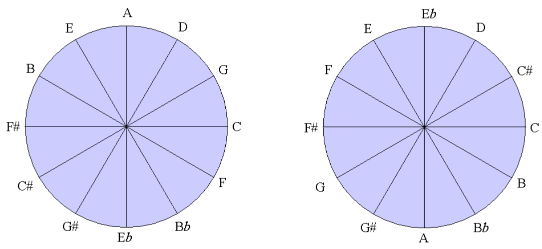
Symmetrier uden betydning

Læseren opfordres til at fortsætte med at gennemtænke tilfældene $a = 2^{p/12}$ for forskellige værdier af p (eller se [2]). Der fremkommer en række symmetriobjekter herunder heltoneskalaen, den formindskede firklang og den forstørrede treklang samt tritonusklangen, en række klange, der vel at mærke ikke har nogen central rolle i den klassiske musik. Og det er netop min pointe: Det er højst usædvanligt, at iøjnefaldende matematiske strukturer ikke indtager nogen fremtrædende rolle. I den klassiske musik er det derimod de asymmetriske strukturer, som dur- og moltreklangene samt diatoniske skalaer[2], der har de centrale roller. Klaviaturet er endda selv asymmetrisk opdelt i hvide og sorte tangenter. Dette forhold antyder, at vores tonesystem og den klassiske musik er fremmede for hinanden. Vi vil da også se, at de fremmede symmetrier forsvinder, når vi vender blikket mod de klassiske stemninger. Anderledes er det naturligvis med senere musikstilarter, genrer som fx impressionisme (tænk fx på heltoneskalaer hos Debussy), tolvtonemusik og jazz, som er stærkt knyttet til den moderne stemning. Udviklingen af den moderne stemning finder sted samtidig med sådanne gennembrud samt den senromantiske frigørelse fra bundethed til enkelte tonearter ([1], Introduction).

[2] En diatonisk skala i C-dur er alle de hvide tangenter fra C op til C en oktav højere. Den består af hel- og halvtonetrin: 1-1-$\frac{1}{2}$-1-1-1-$\frac{1}{2}$.

Kvintcirklen

Kvintcirklen fremkommer på tilsvarende måde ved at placere tonerne i kvintrækkefølgen C, G, D, A, E,... osv., idet vi nu lader en vinkel på 1/12 omgang repræsentere 700 cent (i stedet for 100 cent). En hel omgang svarer nu til 8400 cent. I den moderne stemning danner tonerne igen en regulær 12-kant. Rækkefølgen er blot anderledes.

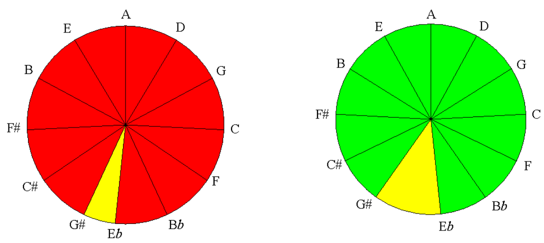


Figur 1. Til venstre: I den moderne stemning er alle kvinter på 700 Cent. Til højre: Alle halvtonespring i den moderne stemning er på 100 Cent.

Syv-reglen. Tænk på en elastik, der er viklet én gang omkring et paprør. Der er afsat 12 mærker med samme afstand på elastikken, så de danner en regulær 12-kant. Nu strækkes elastikken, så den kan vikles 7 gange rundt om paprøret. De tolv mærker danner igen en regulær 12-kant; rækkefølgen er blot ændret. Hvis vi i stedet vikler elastikken 49 gange rundt om paprøret, vil mærkerne atter ligge i den oprindelige rækkefølge! Anvender vi dette på vore tonecirkler, kan vi formulere *syv-reglen*: Transformationen "gå syv skridt frem" afbilder den kromatiske cirkel på kvintcirklen og omvendt: Hvis man går 7 skridt frem i den kromatiske cirkel, kommer man i alt en kvint op, fx (C, C#, D, E♭, E, F, F#, G). Det virker også den anden vej: Hvis man går 7 skridt frem i kvintcirklen, vil man ende en halv tone højere, fx (D, A, E, B, F#, C#, G#, E♭).

Matematisk set vil den komplekse funktion $f(z) = z^7$ multiplicere argumentet for det komplekse tal z med 7. Vi kan lade vores moderne 12 toner svare til de 12 komplekse enhedsrødder i $z^{12} = 1$. Anvender vi nu f to gange efter hinanden på sådan en enhedsrod, får vi $f(f(z)) = z^{49} = (z^{12})^4 \cdot z = z$, dvs. enhedsrødderne er invariante under f^2. Det bunder i at $7^2 \equiv 1 (mod 12)$.

Fire-reglen. Hvis man går fire trin frem kommer man en terts op, og bemærk, at det er uanset om man bruger den kromatiske cirkel eller kvintcirklen. Det hænger sammen med, at for en enhedsrod til $z^{12} = 1$, vil $(z^7)^4 = z^4$.

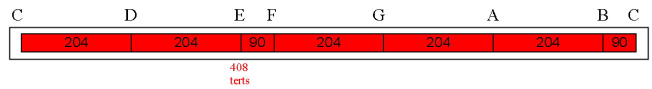


Figur 2. Til venstre: I den pytagoræiske stemning vil de 11 rene kvinter på 702 cent kun levne plads til en ulvekvint på 678 cent. Til højre: I middeltonestemningen vil de 11 kvinter på 697 cent skulle suppleres med en ulvekvint på 738 cent.

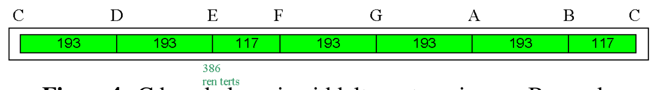
Den pytagoræiske stemning

Den pytagoræiske skala er konstrueret ud fra kvinter, der har en frekvensfaktor på 3/2 gange en udgangstone. Der er 11 rene kvinter på 702 cent, se de røde felter fra E♭ til G# på figur 2 (tv). Den resterende kvint på 678 cent er uacceptabelt lav og kaldes derfor "ulvekvinten", se det gule felt på figur 2 (tv).

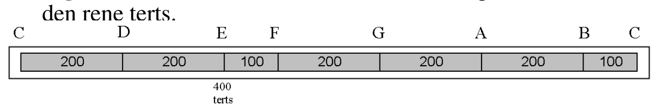
I C-dur bliver alle heltoneintervallerne på 204 cent, idet man skal gå to kvinter frem på figur 2 (tv): 702+702=1704≡ 204 (mod 1200). Heltoneintervallerne CD, DE, FG, GA og AB er altså alle lidt større end vi bruger i dag. De to halvtoneintervaller EF og BC er til gengæld lidt mindre, end i dag, nemlig kun 90 cent. Udregningen fremgår af at trække de 5 heltonetrin fra 1200 cent og dele med 2. Trinstørrelserne i den skala, vi nu får, fremgår af figur 3. Den egner sig vældig godt til melodier, fordi det bliver ganske tydeligt, hvornår der er tale om heltonespring og halvtonespring. Den lille overdrivelse fremmer forståelsen, og melodier fremtræder flottere og mere profilerede. Det lille "ledetoneinterval" BC gør melodier meget lyse. Jeg vil derfor kalde en sådan skala *melodisk*. Til gengæld er den *uharmonisk* pga. den alt for store terts på 408 cent. Alle skalaer og intervalstørrelser i den pytagoræiske stemning findes i [2], appendiks. Der er kun 6 anvendelige tonearter.



Figur 3. Den pytagoræiske Cdur skala. Bemærk den lyse terts.



Figur 4. Cdur skalaen i middeltonestemningen. Bemærk den rene terts.



Figur 5. Den diatoniske Cdur skala i den moderne stemning til sammenligning.

Middeltonestemningen

Denne har elleve lave kvinter samt én "ulvekvint" G#E♭ som er uacceptabelt stor, se figur 2 (th). Det giver den samme begrænsning, nemlig at man kun kan anvende seks tonearter. I disse tonearter vil treklange klinge særdeles smukt pga. en ren terts. Jeg vil kalde sådanne tonearter *harmoniske*. Til gengæld vil heltoneintervallerne være noget lavere end vi er vant til (193 cent), se figur 4, mens halvtoneintervallerne er voldsomt store (117 cent). Når man fx går syv kvinter frem fra E til F, kommer man til at inddrage den store ulvekvint. Det giver melodier et slattent udtryk (som fremført af en upræcis sanger eller violinist) og tonearterne kan med rette kaldes *umelodiske*.

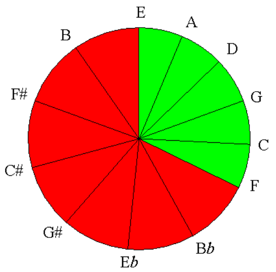
Klassisk tempering

Da det er principielt umuligt at få alle toneintervaller helt rene, ender vi med spørgsmålet om at fordele urenhed på én eller anden måde. I den moderne, ligesvævende stemning fordeles snavset jævnt ud over det hele i et tyndt lag. Der er absolut ingen forskel på tonearterne; de lyder fuldstændig ens på nær selve tonelejet, ingen er specielt rene eller urene. Det svarer lidt til at have et hus, som ikke kan rengøres, men hvor snavset kan flyttes rundt. Man kan sige, at den såkaldt rene stemning, den pytagoræiske stemning og middeltonestemning er tre forskellige måder at flytte snavset, så der er rent nogle steder og uudholdeligt andre steder. I de *klassiske tempereringer* går man en fjerde vej, idet man gør en dyd ud af snavset: Det er en oplagt idé at kombinere de rene kvinter, som er for store, med middeltonekvinter, som er for små. En stemning er tempereret, når alle tonearter kan anvendes. På Bachs tid forsøgte man sig med at temperere på denne måde. Lad os beregne resultatet af 12 skridt med de forskellige kvinter:

- 12 moderne kvinter $(2^{7/12})^{12} = 2^7 = 128$, hvilket er *præcis* 7 rene oktaver
- 12 rene kvinter $(3/2)^{12}$ ≈129,7, hvilket *overskrider* 7 oktaver
- 12 middeltonekvinter $(5^{1/4})^{12} = 5^3 = 125$, hvilket er *utilstrækkeligt* til 7 oktaver.

Lad os i stedet prøve at kombinere 4 middeltonekvinter med 1 moderne kvint og derpå 7 rene kvinter: Det giver overraskende nok $(5^{1/4})^4 \cdot (3/2)^7 \cdot 2^{7/12} \approx 127,99991 \approx 128,000$, hvilket inden for al ønskelig nøjagtighed netop er 7 rene oktaver!

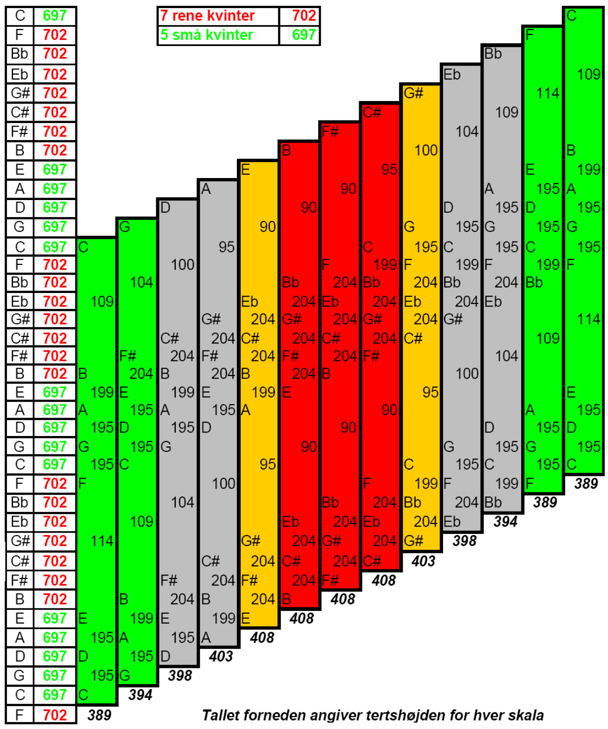
Den stemning, som benytter sig af disse kvintskridt, kaldes Kirnberger III tempereringen efter Johann Kirnberger (elev af J. S. Bach), se figur 6. Dette er blot én af en lang række meget nært beslægtede forslag til at opnå en temperering ved kombination af store og små kvinter. Beslægtede tempereringer bærer navne som Andreas Werckmeister, Thomas Young, Francesco Vallotti, Niedhardt m. fl. Princippet med at kombinere rene kvinter med lave kvinter har holdt sig helt frem til perioden 1895-1905, hvor den moderne, ligesvævende temperering slog igennem og blev standard ([1], Introduction). Dette går hånd i hånd med musikkens udvikling væk fra at være toneartsfikseret. I senromantikken bliver musikken mere og mere modulerende grænsende til det nærmest feberagtigt fabulerende. I modsætning til de klassiske tempereringer kan den moderne stemning byde på ensartede heltoneskalaer som egner sig til impressionistisk musik, ligesom tolvtonemusikken fremstår bedst med tolv fuldstændig ligeberettigede toner.



Figur 6. En klassisk temperering er sammensat af nogle rene kvinter og nogle lave kvinter, som tilsammen udfylder kvintcirklen og gør alle tonearter brugbare.

Konflikten mellem harmoni og melodi

Det er væsentligt at hæfte sig ved denne fundamentale konflikt mellem *harmoni* og *melodi*, en konflikt hvor man altid må vælge side. Antag fx, at man i C-dur skal synge B (læs H!) efterfulgt af C og at B samtidig optræder som terts i dominantakkorden, hvor G er grundtone. Hvis B skal *harmonere* med G, skal det synges mørkt for at få en ren terts GB. Hvis B derimod skal fungere *melodisk* som ledetone til grundtonen C, så skal B synges lyst. Her må man vælge i konflikten mellem at tænke vandret og lodret. Lad os se, hvad det gør for musikkens tonemateriale at anvende en klassisk temperering som fx. Kirnberger III (se figur 7). Vi får nogle tonearter, som er udpræget *harmoniske* C-dur, G-dur og F-dur, altså dem med højst ét fortegn. Vi får andre tonearter, som er udpræget *melodiske* E-dur, B-dur, F#-dur og C#-dur, altså dem med mere end fire fortegn. Vi får nogle *mellemtonearter* som D-dur, B*b*-dur, A-dur og E*b*-dur, altså dem med 2-3 fortegn. Eksempelvis er D-dur karakteriseret ved, at 1. trin i skalaen er meget lille, mens 2. trin er meget stort, hvilket tydeligt udstilles i Bachs præludium i D-dur fra WTK1.



Figur 7. Excel regneark med alle 12 durskalaer i en klassisk stemning med 7 rene kvinter og 5 mindre kvinter (fx Kirnberger III). En søjle viser den diatoniske durskala startende nedefra med grundtonen. Tallene viser springene i heltone- og halvtoneintervaller. De grønne er de udpræget *harmoniske*, de røde er de udpræget *melodiske*. Tallet under hver søjle viser tertsens størrelse. Husk, at der går 7 kvinter til et halvtonetrin

Beregning af klassisk temperering og musikeksempler

Beregninger af toneafstand i en klassisk temperering foregår i et regneark, hvor der er valgt størrelser af de 12 kvinter, som til sammen skal give 8400 cent. De diatoniske durskalaer beregnes ved at lægge to kvinter sammen for heltonespring og syv kvinter for halvtonespring. I Excel kan man med fordel benytte funktionen "=REST(tal;divisor)" til at beregne disse summer modulo 1200. Det giver en oversigt som vist i figur 7.

Bemærk at mellemtonearterne D, A, E*b* og B*b* minder meget om de moderne. Men fx har E*b* og B*b* meget store afstande mellem de to øverste toner (ledetoneintervallet). For D-dur er afstanden fra første til anden tone mindre end fra anden til tredje tone - modsat den rene stemning, hvor det er lige omvendt. I Bachs D-dur præludium WTK1 bliver lytteren hele tiden konfronteret med denne forskel; DEF# kommer igen og igen.

Den klassiske musik får de oprindelige farver tilbage, hvis den fremføres med klassisk temperering frem for den moderne. En lang række eksempler i [2] viser, at valget af toneart ikke er tilfældigt, men en del af den støbeform hvori musikken fremstår. Eksemplerne viser hvordan komponister behændigt udnytter toneartemes stærke sider og tager hensyn til deres svage sider.

Litteratur

Litteraturen er ofte modstridende. Ældre udgaver af The Grove Concise Dictionary of Music fremstiller klassiske tempereringer som fejlslagne forsøg på at tilnærme den moderne, ligesvævende temperering. Et væld af bøger har ar fra denne opfattelse, herunder Den store danske encyklopædi. Til et gymnasiebibliotek/ studiecenter kan jeg anbefale at anskaffe [3], [4], [9], [10], [11].

Litteratur

[1] Owen Jorgensen: Tuning. Containing the perfection of eighteenth-century temperament, the lost art of nineteenth-century temperament, and the science of equal temperament, complete with instructions for aural and electronic tuning. East Lansing: Michigan State University Press, 1991.

[2] Jens Ulrik Lefmann: Den gode stemning, høresansens fysik og tonal musikalitet, www.emu.dk/gym/fag/fy/-inspiration/forloeb/boelger/dengodestemning.html

[3] Ross W. Duffin: How Equal Temperament Ruined Harmony (and Why You Should Care), W. W. Norton & Company 2007.

[4] Asmus Schmidt: Kædebrøker, Gyldendal 1967.

[5] Hardy & Wright: The Theory of Numbers, Oxford 1939.

[6] J. Murray Barbour: Tuning and Temperament – a historical survey, Dover Publication, Inc. 2007.

[7] Jesper Lützen: Cirklens kvadratur, vinklens tredeling og terningens fordobling, Systime 1993.

[8] Bjørn Grøn: Fra græsk geometri til moderne algebra, www.emu.dk/gym/fag/ma/undervisningsforloeb/-paradigmatiske/not/n314.doc

[9] David J. Benson: Music - A Mathematical Offering, Cambridge University Press 2007.

[10] Hans Buhl: Sfærernes Harmoni, Steno Museets Venner 2000.

[11] Gareth Loy: Musimathics - The mathematical Foundations of Music, Vol. 1+2, MIT Press 2006.

[12] Cd'er: Der er et væld af indspilninger med klassisk temperering. Jeg kan anbefale Cd'er med Lars Ulrik Mortensen, cembalist og dirigent for det danske ensemble Concerto Copenhagen. Bachs Das Wohltemperierte Klavier I+II med Zuzana Ruzickova er indspillet på cembalo stemt i Niedhardt temperering fra 1729.

[13] Glimrende side af Kyle Gann, http://home.earthlink.net/~kgann/histune.html

[14] Godt diasshow, http://campus.murraystate.edu/staff/-scott.thile/research/unequal/index.htm

[15] Om bl.a. Owen Jorgensens TUNING, http://www.mmdigest.com/Tech/jorgensen.html

Gode søgeord på nettet: 'Historical tuning', 'mean tone intonation', 'just intonation', 'equal temperament', 'Kirnberger III', 'Werckmeister', 'Francesco Vallotti', 'Thomas Young', 'Niedhardt temperament'.

Jens Ulrik Lefman er lektor i matematik og fysik på Birkerød Gymnasium og ekstern lærer i fysik på DTU. E-mail: ju@birke-gym.dk.