Luftmodstand – breddeopgave 30 med didaktisk kommentar

Af Jens Højgaard Jensen, IMFUFA, RUC.

Mit formål med artikelserien om breddeopgaver er – udover at gøre opmærksom på RUCs fysikuddannelse – dobbelt: Dels udvælger jeg opgaverne, så de kan have interesse som fysikproblemer i egen ret. Dels udvælger jeg dem med henblik på at kunne knytte didaktiske overvejelser til dem af interesse for fysikundervisere. I første omgang i forhold til universitetsundervisning. Men i anden omgang kunne der måske også trækkes paralleller til andre undervisningsniveauer.

Her bringes løsning og kommentarer til opgaven fra forrige nummer samt en ny opgave. Opgaven i sidste nummer af KVANT var denne breddeopgave fra RUC (nr. 30 i rækken her i KVANT):

30. Luftmodstand

Børn og voksne kommer i reglen ikke lige hurtigt ned ad bakke på cykel. Hvem kommer hurtigst ned? Begrund svaret.

Løsning

Vi vil se på tilfældet, hvor der køres i frigear ned ad bakken. Og vi vil antage luftmodstanden for afgørende større end rullemodstanden mellem dæk og vej. Det er det tilfælde, der kan gøres enkle fysiske overvejelser over. Fra bakketoppen vil farten i frigear vokse indtil den når den konstante frigearsfart, der får den modsatrettede luftmodstand til at være lige så stor som komposanten af tyngdekraften langs med vejen.

Hvis vi med konstant frigearsfart befinder os i den hydrodynamiske grænse, hvor cyklistens potentielle energi løbende umiddelbart omsættes til gnidningsvarme i den omgivende luft, må luftmodstanden, udover af farten, v, cyklistens form, og cyklistens størrelse, r, være bestemt af luftens viskositet, η. Da dimensionerne af v, r og η er henholdsvis LT^{-1}, L og $\mathrm{ML}^{-1}\mathrm{T}^{-1}$, og dimensionen af luftmodstanden er MLT^{-2}, må luftmodstanden i denne grænse af dimensionsgrunde derfor være et dimensionsløst tal (afhængig af cyklistens form) gange $r \cdot v \cdot \eta$. Da komposanten af tyngdekraften langs med vejen er proportional med r^3, ses v at være proportional med r^2. Den konstante frigearsfart er således større for den voksne end for barnet.

Hvis vi med konstant frigearsfart befinder os i den modsatte hydrodynamiske grænse, hvor cyklistens potentielle energi løbende umiddelbart omsættes til kinetisk energi i hvirvler og strømninger i et kølvand, må luftmodstanden, udover af farten, v, cyklistens form, og cyklistens størrelse, r, være bestemt af luftens massefylde, ρ. Da dimensionerne af v, r og ρ er henholdsvis LT^{-1}, L og ML^{-3}, og dimensionen af luftmodstanden er MLT^{-2}, må luftmodstanden i denne anden grænse af dimensionsgrunde derfor være et dimensionsløst tal (afhængig af cyklistens form) gange $r^2 \cdot v^2 \cdot \rho$. Da komposanten af tyngdekraften langs med vejen er proportional med r^3, ses v at være proportional med $\sqrt{r}$. Også i denne grænse ses den konstante frigearsfart således at være større for den voksne end for barnet.

I begge hydrodynamiske grænser kommer voksne altså hurtigere end børn ned ad bakke på cykel.

Kommentar

Breddekurset under fysikstudiet på RUC indeholder blandt alle dets andre delemner fra fysik to halve dages undervisning i hydrodynamik. Det levner tid til opstilling af Bernoullis ligning, men ikke til opstilling af Navier-Stokes ligningerne. Derfor behandler jeg i kurset fænomener angående det, som Feynmann i sine Feynmann Lectures kalder vådt vand, ved hjælp af dimensionsbetragtninger som ovenstående: Trækkes en genstand igennem et medie, vil det udførte arbejde i den laminare grænse ved lavt Reynolds tal afsættes direkte som varme i mediet.

Trækkraftens nødvendige størrelse må derfor være bestemt af mediets viskositet udover af genstandens form, lineære udstrækning og fart. Og den må derfor af dimensionsgrunde være et tal gange $r \cdot v \cdot \eta$. Hvorimod det udførte arbejde i den modsatte grænse med turbulent kølvand og højt Reynolds tal umiddelbart afsættes som kinetisk energi i kølvandet, hvorfor trækkraftens nødvendige størrelse her må være bestemt af mediets massefylde udover af genstandens form, lineære udstrækning og fart. Og den må derfor af dimensionsgrunde være et tal gange $r^2 \cdot v^2 \cdot \rho$.

Reynolds tal kan for tilfældet luftmodstand netop udtrykkes ved forholdet imellem de nødvendige trækkræfter i de to grænser:

$$Re = \frac{r^2 \cdot v^2 \cdot \rho}{r \cdot v \cdot \eta} \tag{1}$$

På kurset gennemgår jeg også strømning igennem rør i henholdsvis den laminare og den turbulente grænse ved hjælp af dimensionsanalyse på tilsvarende måde.

Jeg har søgt i litteraturen efter en lignende håndfast udmelding om den hastighedskvadratiske luftmodstand ved høje hastigheder (stort Reynolds tal). Og fundet en sådan i den populærvidenskabelige bog: Ascher H. Shapiro (1961): "Shape and Flow, The Fluid Dynamics of Drag". Anchor Books, New York (en af bøgerne fra den amerikanske "Science Study Series", der for en dels vedkommende – men ikke denne – udkom på dansk som "Gyldendals Kvantebøger" i begyndelsen af 1960'erne). Men typisk er lærebøger i hydrodynamik jo mere forsigtige.

Det er godt nok ρ og ikke η, der er den styrende materialekonstant for energitætheden i kølvandet efter en hurtigt bevæget genstand. Men det er kombinationen af ρ og η i form af Reynolds tal, der afgør, hvor udbredt kølvandet er. Hvorfor luftmodstanden i visse situationer sågar kan falde med øget fart på grund af kølvandsindsnævring. Derfor er den typiske lærebogsfremstilling den korrekte, at luftmodstanden er givet ved $r^2 \cdot v^2 \cdot \rho$ gange en dimensionsløs modstandskoefficient, der for en given form er en entydig funktion af Reynolds tal. Da luftmodstanden, udover af r og v, således afhænger af både ρ og η, er der derfor for mange inputvariable til, at den kan fastlægges ved dimensionsanalyse.

Men i praksis er hastighedskvadratisk luftmodstand det måske mest almindeligt dagligdags forekommende. Og sikkert også det, der er tilfældet ved cykling ned ad bakke. Fordi kølvandets udbredning ved store hastigheder bag ikke strømliniede genstande mere eller mindre må være bestemt alene af genstandenes tværsnit uafhængigt af η. Og så kan luftmodstanden fastlægges som gjort ved dimensionsanalyse.

I en situation, hvor det empirisk er konstateret, at luftmodstanden vokser kvadratisk med hastigheden, kan det omvendt ved dimensionsanalyse indses, at luftmodstanden må være uafhængig af η.

Breddeopgave 31. Springflod

Inden næste nummer af KVANT udkommer, kan læserne eventuelt overveje løsningen til denne eksamensopgave fra breddekurset på RUC (fra sygeeksamen september 1987, nr. 31 i rækken her i KVANT):

Indtræffer springflod ved fuldmåne, nymåne eller halvmåne? Begrund svaret.

Løsning og kommentar bringes i næste nummer.